UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Espacios de Sucesiones de Lorentz: Normas Equivalentes, Operador Composición y Multiplicación

Oscar Mauricio Guzmán Fonseca

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2014

Espacios de Sucesiones de Lorentz: Normas Equivalentes, Operador Composición y Multiplicación

Oscar Mauricio Guzmán Fonseca

Tesis o trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Ciencias Matemáticas

Director:
René Erlín Castillo. Ph.D.

Línea de Investigación:
Análisis, Teoría de operadores, Espacio de funciones.

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2014

Agradecimientos

Agradezco a Dios y de manera especial al Profesor René Castillo por la constante colaboración y soporte para el desarrollo de este trabajo, a mi familia por su paciencia y motivación, y a todas las personas que estuvieron de algún modo cercanas en este proceso.

Resumen

En el presente trabajo se estudian las diferentes desigualdades que relacionan las diferentes normas definidas en el espacio de sucesiones de Lorentz, así como las principales características del operador composición y multiplicación, la compacidad, invertibilidad y caracterización de ellos en $\ell^{p,s}$.

Palabras clave: Operador multiplicación, operador Composición, operador compacto, reordenamiento decreciente, función maximal, espacios de sucesiones de Lorentz.

Abstract

In the present work the various inequalities relative the various norms defined in the Lorentz sequences spaces are studied, as well as compactness, boundedness and invertibility of the multiplication and composition operators on $\ell^{p,s}$.

Keywords: Compact operator, multiplication operator, distribution function, decreasing rearrangement, maximal function, Orlicz-Lorentz spaces.

Índice general

INTRODUCCIÓN

En el prentese trabajo se estudian algunas propiedades básicas de los espacios de sucesiones de Lorentz $\ell^{p,s}$, en la medida de lo posible se realizará un estudio autocontenido, el mismo se hace con el fin de establecer una base teoríca para analizar las diferentes desigualdades que satisfacen las normas equivalentes en dicho espacio via las sucesiones de nivel, introducidas por Halperin en [9] y recientemente estudiadas por autores como Sinnamon en [15], así como para caracterizar y establecer condiciones bajo las cuales el operador composición y multiplicación son compactos de rango cerrado e invertibles. Es importante señalar la diferencia entre $L^{p,s}$ y $\ell^{p,s}$ lo que justifica por sí mismo el presente trabajo.

Así por ejemplo, el espacio de lorentz $L^{p,s}$ es trivial cuando $p = \infty$ y $1 \leq q < \infty$, no así el espacio de sucesiones de Lorentz $\ell^{p,s}$. Además el único operador multiplicación compacto en un espacio de Lorentz no átomico es el operador nulo (ver [10]) no obstante en $\ell^{p,s}$ el operador multipliación M_u es compacto cuando $u = (u_n)_n \to 0$ si $n \to \infty$. Para un estudio sistemático del operador coposición y multiplicación veáse [16], [17], [1] y [2].

Capítulo 1

Constantes Óptimas entre Normas Equivalentes en Espacios de Sucesiones de Lorentz

En este capítulo se estudiarán algunas desigualdades relacionadas con las normas definidas en los espacios de sucesiones de Lorentz y las constantes óptimas involucradas en ellas.

Se define el espacio de sucesiones de Lorentz $\ell^{p,s}$ como el conjunto de todas las sucesiones complejas $x = (x_n)_n$ tal que $\|x\|_{p,s} < \infty$ donde

$$\|x\|_{p,s} = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^*)^s \, n^{s/p-1} \right)^{1/s} & s < \infty \\ \sup_{n \geq 1} \left\{ n^{1/p} x_n^* \right\} & s = \infty \end{cases} \tag{1.1}$$

La sucesión $x^* = (x_n^*)$ se denomina reordenamiento decreciente de $x = (x_n)_n$ y se obtiene al ordenar $(|x_n|)$ de manera decreciente.

Precisamente, para $n - 1 \leq t < n$ se tiene

$$x_n^* = x^*(t) := \text{ínf} \{s > 0 : D_x(s) \leq n - 1\},$$

donde $D_x(s)$ es la *función distribución* de x que se define como

$$D_x(s) := \mu \{n \in \mathbb{N} : |x_n| > s\}.$$

Observación 1.1. *El espacio de Lorentz $L^{p,s}$ es una familia biparamétrica de funciones la cual generaliza el espacio de Lesbegue L^p. Los espacios de Lorentz fueron definidos por Lorentz en*

[13]. Un estudio general de los espacios de Lorentz fue realizado por Hunt en [11].

Supóngase un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *para cualquier función* $\mathcal{A}$*- medible y dos números reales extendidos* p *y* s *en el conjunto* $[1, \infty]$ *se define*

$$\|f\|_{p,s} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (f^*(t))^s\, t^{s/p-1} dt\right)^{1/s} & s < \infty \\ \sup\limits_{t \geq 0} \left\{t^{1/p} f^*(t)\right\} & s = \infty \end{cases}$$

$\|.\|_{p,s}$ *son funciones no negativas definidas en los reales extendidos y los espacios de Lorentz serán definidos en términos de estas funciones tal como se define el espacio de Lesbegue en términos de* $\|.\|_p$.

El espacio $L^{p,s}$ *con* $1 \leq s < \infty$ *y* $s = \infty$ *no será de interés. En efecto, si* f *es una función medible tal que* $\|f\|_{\infty,s} < \infty$ *para algún* $s \in [1, \infty)$*, entonces*

$$\int_0^\infty (f^*(t))^s \frac{dt}{t} \geq \int_0^s (f^*(t))^s \frac{dt}{t} \geq f^*(s) \int_0^s \frac{dt}{t},$$

porque $f^*(t) \geq f^*(s)$ *cuando* $0 \leq t \leq s$ *y por lo tanto* $f^*(s) = 0$ *para todo* $s > 0$*. Así que* $f = 0$ *c.t.p lo cual implica que* $L^{p,s} = \{0\}$ *para cada* $0 < s < \infty$.

Por otro lado, el espacio discreto de Lorentz $\ell^{p,s}$ *y el espacio* $L^{p,s}$ *cuando* $X = \mathbb{N}$, $\mathbb{A} = 2^{\mathbb{N}}$ *y* μ *es la medida de contar son equivalentes para* $0 < p < \infty$, $0 < s < \infty$*. De hecho si* $a^*(t) = f^*(t)$, $n - 1 \leq t \leq n$*, entonces*

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,s} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^s \frac{dt}{t}\right)^{1/s} \\ &= \left(\sum_{n=1}^\infty (a_n^*)^s \int_{n-1}^n t^{s/p-1} dt\right)^{1/s}, \end{aligned}$$

y dado que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{s/p} n^{s/p-1} \leq \int_{n-1}^n t^{s/p-1} dt \leq 2n^{s/p-1},$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^{s/p} \sum_{n=1}^\infty (a_n^*)^s n^{s/p-1} &\leq \sum_{n=1}^\infty (a_n^*)^s \int_{n-1}^n t^{s/p-1} dt \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^\infty (a_n^*)^s n^{s/p-1}, \end{aligned}$$

entonces

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{1/p}a_n^*\right)^s\frac{1}{n}\right)^{1/s}\leq\|f\|_{p,s}\leq 2^{1/s}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{1/p}a_n^*\right)^s\frac{1}{n}\right),$$

así que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/p}\|a\|_{p,s}\leq\|f\|_{p,s}\leq 2^{1/p}\|a\|_{p,s}.$$

Nótese que el espacio $\ell^{p,s}$ no es vacío cuando $p=\infty$. Por ejemplo, todas la sucesiones que tienen solo un número finito de elementos no nulos pertenecen a $\ell^{\infty,s}$ para todo $0<s\leq\infty$. Esto muestra una diferencia fundamental entre $\ell^{\infty,s}$ y $L^{\infty,s}$.

El espacio de Lorentz $\ell^{p,s}$ es un espacio vectorial normado si y sólo si $1\leq s\leq p<\infty$ (ver [12]). Además es un espacio normable cuando $1<p<s\leq\infty$, es decir, existe una norma equivalente a $\|.\|_{p,s}$. Para los casos restantes, $\ell^{p,s}$ no puede ser dotado con una norma equivalente. La normabilidad para el caso $p<s$ se lleva a cabo vía la *norma maximal*:

$$\|x\|_{p,s}^*=\begin{cases}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n^{**}\right)^s n^{s/p-1}\right)^{1/s} & s<\infty\\ \displaystyle\sup_{n\geq 1}\left\{n^{1/p}x_n^{**}\right\} & s=\infty\end{cases}\tag{1.2}$$

Donde $x^{**}=(x_n^{**})_n$ se denomida la sucesión maximal de $x^*=(x_n^*)_n$ y está dada por

$$x_n^{**}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^*.$$

Las desigualdades que satisfacen $\|.\|_{p,s}$ y $\|.\|_{p,s}^*$ son

$$\|.\|_{p,s}\leq\|.\|_{p,s}^*\leq p'\,\|.\|_{p,s}.$$

La parte izquierda de esta desigualdad es consecuencia del hecho que $x^*\leq x^{**}$ (ver proposición 3.2 en [5]). La desigualdad de la derecha se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Sea $x=(x_n)_n$ una sucesión de números complejos, $1<p\leq s<\infty$. Entonces*

$$\|.\|_{p,s}^{*} \leq p' \|.\|_{p,s}\,. \tag{1.3}$$

Demostración. Denótese $r = s - \frac{s}{p}$. Empleando la desigualdad de Hölder, notando que la función $g(t) = t^{r/s-1}$ es decreciente obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^*\right)^s &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^* k^{1-\frac{r}{s}} k^{\frac{r}{s}-1}\right)^s \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k^*)^s k^{s-r} k^{\frac{r}{s}-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{r}{s}-1}\right)^{s/s'} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k^*) k^{s-r} k^{\frac{r}{s}-1}\right)\left(\int_0^n t^{\frac{r}{s}-1} dt\right)^{s/s'} \\
&= \left(\frac{s}{r}\right)^{s/s'} n^{\frac{r}{s'}} \sum_{k=1}^{n} (x_k^*)^s k^{s-r} k^{\frac{r}{s}-1}.
\end{aligned}$$

Además, dado que $f(t) = t^{-1-\frac{r}{s}}$ es decreciente y $\int_k^\infty t^{-1-\frac{r}{s}} < \infty$ se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k-1}^{k} f(n) &\leq \int_{k-2}^{k} f(t)dt \Leftrightarrow \\
\sum_{k=m+1}^{\infty}\left(\sum_{n=k-1}^{k} f(n)\right) &\leq \sum_{k=m+1}^{\infty}\left(\int_{k-2}^{k} f(t)dt\right) \Leftrightarrow \\
\sum_{n=m}^{\infty} f(n) &\leq \int_{m-1}^{\infty} f(t)dt.
\end{aligned}$$

Multiplicando por n^{-r-1}, sumando desde 1 hasta ∞ y empleando la anterior desigualdad e intercambiando el orden de la suma via el teorema de Fubini se obtiene

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^*\right)^{s} n^{-r-1} &\leq \left(\frac{s}{r}\right)^{s/s'} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-r-1+r\left(1-\frac{1}{s}\right)} \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k^*)^s k^{s-r} k^{\frac{r}{s}-1}\right) \\
&= \left(\frac{s}{r}\right)^{s/s'} \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^*)^s k^{s-r} k^{\frac{r}{s}-1} \left(\sum_{n=k}^{\infty} n^{-1-\frac{r}{s}}\right) \\
&\leq \left(\frac{s}{r}\right)^{s/s'} \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^*)^s k^{s-r} k^{\frac{r}{s}-1} \left(\int_{k}^{\infty} t^{-1-\frac{r}{s}} dt\right) \\
&= \left(\frac{s}{r}\right)^{s/s'+1} \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^*)^s k^{s-r-1} dt \\
&= \left(\frac{p}{p-1}\right)^{s} \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^*)^s k^{\frac{s}{p}-1} \\
&= (p')^s \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^*)^s k^{\frac{s}{p}-1}
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$
\|x\|_{p,s}^* \leq p' \|x\|_{p,s} .
$$

□

Observe que si $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1,2,\ldots,N} \in \ell^{p,s}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{N} x^{(k)}\right\|_{p,s} &\leq \left\|\sum_{k=1}^{N} x^{(k)}\right\|_{p,s}^{*} \\
&\leq p' \sum_{k=1}^{N} \left\|x^{(k)}\right\|_{p,s}. \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

Esto es, $\|.\|_{p,s}$ es una cuasinorma. Por otro lado, si (1.4) se cumple, entonces $\|.\|_{p,s}$ es equivalente a una norma. Esta norma se denomida **norma de descomposición** y se define como

$$
\|x\|_{(p,s)} := \text{ínf} \left\{ \sum_{k=1}^{N} \left\|x^{(k)}\right\|_{p,s} \quad : x = \sum_{k=1}^{N} x^{(k)} \right\}.
$$

$\|.\|_{(p,s)}$ es una norma equivalente a $\|.\|_{p,s}$ cuando $1 \leq p, s \leq \infty$. Además $\|.\|_{(p,s)} = \|.\|_{p,s}$ si $1 \leq s \leq p$ (ver [7]).

Otra norma definida en $\ell^{p,s}$ es la denominada **norma dual** la cual viene dada por

$$\|x\|'_{p,s} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad : \|y\|_{p',s'} = 1 \right\}.$$

Equivalente a $\|.\|_{p,s}$, más aún, si $1 \leq s \leq p$ entonces

$$\|.\|'_{p,s} = \|.\|_{p,s}.$$

El siguiente es uno de los resultados más útiles en la teoria de la integración y de las desigualdades.

Lema 1.1. *Sea $u = (u_n)_n$, $v = (v_n)_n$ y $w = (w_n)_n$ sucesiones no negativas y suponga que w es decreciente. Si*

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{n} v_k \quad (n = 1, 2, ...).$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} u_k w_k \leq \sum_{k=1}^{n} v_k w_k.$$

Demostración. Sea $E_j = \{1, 2, ...j\}$. Definamos

$$w_k = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(k).$$

Donde $a_j > 0$ y χ_{E_j} denota la función catacterística de E_j. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} u_k w_k &= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{j} u_k \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{j} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} v_k w_k. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Dada una sucesión medible $w = (w_k)$ existe una sucesión creciente $w^{(s)} = (w_k^{(s)})_s$ de sucesiones decrecientes que satisfacen la desigualdad (1.5) para cada $s = 1, 2, ...$ y además $w^{(s)} \to w$. Aplicando el teorema de la convergencia monótona

$$\begin{aligned} \lim_{s\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k w_k^{(s)} &\leq \lim_{s\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_k w_k^{(s)} \quad \Leftrightarrow \\ \sum_{k=1}^{\infty} u_k w_k &\leq \sum_{k=1}^{\infty} v_k w_k. \end{aligned}$$

$\square$

El siguiente Lema presenta la desigualdad de *Hardy-Littlewood*.

Lema 1.2. *Si $x = (x_k)_k$ y $y = (y_k)_k$ son dos sucesiones medibles y $E \subset \mathbb{N}$, entonces*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k y_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} x_k^* y_k^* \tag{1.6}$$

Demostración. Es suficiente demostrar (1.6) para sucesiones no negativas. Consideremos en primer lugar sucesiones simples. Sea

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{F_j}(k),$$

donde $F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_n$ son conjuntos en $\mathbb{N}$ y $a_j > 0$ para todo $j = 1, ..., n$. Entonces

$$x_k^* = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{[1,\mu(F_j)]}(k),$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in E} x_k &= \sum_{k\in E}\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{F_j}(k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_{E\cap F_j}(k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu\left(E \cap F_j\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} a_j \operatorname{mín}\left(\mu(E), \mu(F_j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{\mu(E)} \chi_{[1,\mu(F_j)]}(k) \\
&= \sum_{k=1}^{\mu(E)} \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[1,\mu(F_j)]}(k) \\
&= \sum_{k=1}^{\mu(E)} x_k^*.
\end{aligned}$$

Es decir que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} x_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*.$$

Por otro lado, emplenado la desigualdad anterior obetemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}} x_k y_k &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{F_j}(k)\right) y_k \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k\in\mathbb{N}} y_k \chi_{F_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k\in F_j} y_k \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{\mu(F_j)} y_k^* \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[1,\mu(F_j)]} y_k^* \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} x_k^* y_k^*.
\end{aligned}$$

Así que la desigualdad buscada es válida para sucesiones simples. Empleando el teorema de la convergencia monótona se tiene el resultado para cualquier par de sucesiones medibles.

□

Observe que si $\tilde{g}$ es equimedible con g entonces $\tilde{g}^* = g^*$. Por esta razón y por la desigualdad de *Hardy-Littlewood* se concluye que

$$\int_{\mathbf{X}} |f\tilde{g}|\, d\mu \leq \int_0^{\infty} f^*(t) g^*(t) dt.$$

Los espacios de medida en los cuales se alcanza la igualdad en la ecuación anterior después de tomar el supremo sobre todas la funciones $\tilde{g}$ equimedibles con g se denominarán *resonantes.* Formalizamos este concepto y el de espacio *fuertemente resonante* en la siguiente definición.

Definición 1.1. *Un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\sigma - finito$ se denomina resonante si para dos funciones medibles arbitrarias f y g*

$$\sup \int_{\boldsymbol{X}} |f\tilde{g}|\, d\mu = \int_{\boldsymbol{0}}^{\infty} |f^*(t) g^*(t)|\, dt.$$

Donde el supremo se toma sobre todas las funciones $\tilde{g}$ equimedibles con g.

Además, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se denominará fuertemente resonante si para f, g funciones medibles, existe $\tilde{g}$ equimedible con g tal que

$$\int_X |f\tilde{g}|\, d\mu = \int_0^\infty |f^*(t)g^*(t)|\, dt. \tag{1.7}$$

En los siguientes dos lemas se emplea la noción de espacio de medida resonante y fuertemente resonante con el fin de demostrar la igualdad $\|x\|'_{p,s} = \|x^*\|'_{p,s}$, $1 < p < \infty$, $1 \leq s \leq \infty$.

Lema 1.3. $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ *es resonante donde μ es la medida de contar. Esto es, dadas $x = (x_n)_n$ y $y = (y_n)_n$*

$$\sup \sum_{n=1}^{\infty} x_n \tilde{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* y_n^* \tag{1.8}$$

Donde el supremo se toma sobre todas las sucesiones $\tilde{y}$ equimedibles con y.

Demostración. Demostraremos primero que cualquier subconjunto finito E de $\mathbb{N}$ dotado con la medida de contar es fuertemente resonante. Sea σ y ρ dos permutaciones sobre el conjunto de los átomos de E , tales que $x_m^* = x_{\sigma(i_m)}$ y $y_n^* = y_{\rho(i_n)}$. Observe que (1.7) es cierta cuando el átomo en el que $(x_n)_n$ alcanza su mayor valor es el mismo átomo en donde $(\tilde{y_n})_n$ alcanza su valor más grande. De la misma manera con el k-ésimo valor más grande, $k = 1, 2, ..., \#X$, así que $(\tilde{y_n})_n$ se obtiene después de una permutación en los átomos de E. Dicha permutación es $\rho^{-1} \circ \sigma$, es decir $\tilde{y_i} = y_{\rho^{-1} \circ \sigma(i)}$.

Ahora consideremos conjuntos finitos E_k cuya unión sea $\mathbb{N}$ y sucesiones crecientes $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_k$, $y^{(k)} = (y_n^{(k)})_k$ con soporte en E_k , $(k = 1, 2, ...)$ tales que $x^{(k)} \uparrow x$ y $y^{(k)} \uparrow y$. Por definición de supremo, para demostrar (1.8) es suficiente mostrar que para cualquier α, que satisface $0 < \alpha < \sum_{n=1|}^{\infty} x_n^* y_n^*$ existe $\tilde{y_n}$ tal que $\alpha < \sum_{n=0}^{\infty} x_n \tilde{y_n} < \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* y_n^*$. Además, $x^{(k)} \uparrow x$ implica $(x^{(k)})^* \uparrow x^*$ si $k \to \infty$, (ver[5]) y por el teorema de la convergencia monótona se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha < \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^{(k)})^* (y_n^{(k)})^* &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} (x_n^{(k)})^* (y_n^{(k)})^* \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* y_n^*. \end{aligned}$$

Por la ecuación anterior, existe N tal que

$$\alpha < \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^{(N)})^* (y_n^{(N)})^*. \tag{1.9}$$

Es claro que $x^{(N)} = x^{(N)}\chi_{E_N} \leq x\chi_{E_N}$ y en consecuencia $(x^{(N)})^* \leq (x\chi_{E_N})^*$. Además (E_N, μ) es un espacio de medida fuertemente resonante, por tanto existe una sucesión $z = (z_n)$ equimedible con $y^{(N)}$ por esta razón y por (1.9)

$$\begin{aligned}
\alpha < \sum_{n=1}^{\mu(E_N)} (x_n^{(N)})^* (y_n^{(N)})^* &\leq \sum_{n=1}^{\mu(E_N)} (x\chi_{E_N})_n^* (y\chi_{E_N})_n^* \\
&= \sum_{n=1}^{\mu(E_N)} (x\chi_{E_N})_n \, z_n = \sum_{n=1}^{\mu(E_N)} x_n z_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n.
\end{aligned}$$

Donde (1.10) se justifica extendiendo z a todo $\mathbb{N}$ haciendo $z_n = 0$ si $n \notin E_N$. Sea

$$\tilde{y} = z\left(\chi_{E_N}\right) + y\left(\chi_{\mathbb{N}\setminus E_N}\right).$$

Observe que y y $\tilde{y}$ son equimedibles, en efecto

$$\begin{aligned}
D_{\tilde{y}}(\lambda) &= \mu\left(\{n \in \mathbb{N} : |\tilde{y_n}| > \lambda\}\right) \\
&= \mu\left(\{n \in \mathbb{N} : |(z\chi_{E_N})_n| > \lambda\}\right) + \mu\left(\left\{n \in \mathbb{N} : \left|(y\chi_{\mathbb{N}\setminus E_N})_n\right| > \lambda\right\}\right) \\
&= \mu\left(\{n \in \mathbb{N} : |(y\chi_{E_N})_n| > \lambda\}\right) + \mu\left(\left\{n \in \mathbb{N} : \left|(y\chi_{\mathbb{N}\setminus E_N})_n\right| > \lambda\right\}\right) \\
&= \mu\left(\{n \in \mathbb{N} : |y_n| > \lambda\}\right) = D_y(\lambda).
\end{aligned}$$

Además $\tilde{y} \geq z$, entonces, por (1.10)

$$\alpha < \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n \tilde{y_n}. \tag{1.10}$$

Y esto demuestra (1.8).

□

Empleando el lema anterior se obtiene el siguiente resultado

Teorema 1.2. *Sea $x = (x_n)_n \in \ell^{p,s}$, $1 < p < \infty$, $1 \le s \le \infty$. Entonces,*

$$\|x\|'_{p,s} = \|x^*\|'_{p,s}.$$

El siguiente lema presenta las principales características de la norma de descomposición $\|.\|_{(p,s)}$.

Lema 1.4. *Sea $x = (x_n)_n \in \ell^{p,s}$, $1 < p < \infty$, $1 \le s \le \infty$. Entonces*

(a)

$$\|x\|_{(p,s)} = \text{ínf}\left\{\sum_k \left\|x^{(k)}\right\|_{p,s}\right\}. \tag{1.11}$$

Donde el infimo se toma sobre todas la sucesiones finitas y no negativas que satisfacen $|x_n| = \sum_k x_n^{(k)}$.

(b) Si $0 \le y \le x$ entonces $\|y\|_{(p,s)} \le \|x\|_{(p,s)}$.

(c) Si $0 \le y^{(k)} \le x$, $y^{(k)} \nearrow x$ cuando $k \to \infty$, entonces $\left\|y^{(k)}\right\|_{(p,s)} \to \|x\|_{(p,s)}$.

Demostración. (a). Consideremos $|x_n| = \sum_k x_n^{(k)}$, esta igualdad implica que $x_n = \sum_k x_n^{(k)} \operatorname{sgn} x_n$. Sea $y^{(k)} = x^{(k)} \operatorname{sgn} x$, con esta notación $x = \sum_k y^{(k)}$. Por definición de la norma de descomposición y notando que $\left\|x^{(k)}\right\|_{p,s} = \left\|y^{(k)}\right\|_{p,s}$ se obtiene

$$\|x\|_{(p,s)} \le \sum_k \left\|y^{(k)}\right\|_{p,s} = \sum_k \left\|x^{(k)}\right\|_{p,s}.$$

Así que $\|x\|_{(p,s)} \le \text{ínf}\left\{\sum_k \left\|x^{(k)}\right\|_{p,s}\right\}$.

Por otro lado, acudiendo a la definición de ínfimo en la norma de descomposición, dado $\epsilon > 0$ existe una sucesión finita $y^{(k)}$ tal que $x = \sum_k y^{(k)}$ y

$$\|x\|_{(p,s)} > \sum_k \left\|y^{(k)}\right\|_{p,s} - \epsilon. \tag{1.12}$$

Por la desigualdad triangular $|x| \le \sum_k \left|y^{(k)}\right| = C$. Sea $x^{(k)} = \left|x.y^{(k)}\right|/C$. Entonces, como $1/C \le 1/|x|$, $x^{(k)} \le y^{(k)}$. En consecuensia

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{p,s} \le \left\|y^{(k)}\right\|_{p,s}. \tag{1.13}$$

Además

$$\sum_k x^{(k)} = |x| \frac{\sum_k \left|y^{(k)}\right|}{C} = |x| \,.$$

Por (1.12) y (1.13) se tiene

$$\|x\|_{(p,s)} > \sum_k \left\|x^{(k)}\right\|_{p,s} - \epsilon.$$

Por tanto

$$\|x\|_{(p,s)} \geq \text{ínf} \left\{ \sum_k \left\|x^{(k)}\right\|_{p,s} \right\} - \epsilon.$$

Es decir

$$\|x\|_{(p,s)} \geq \text{ínf} \left\{ \sum_k \left\|x^{(k)}\right\|_{p,s} \right\}.$$

Lo cual demuestra (1.11).

(b). Empleando la parte (a) se obtiene el resultado.

(c). Dado que $y^{(k)} \nearrow x$ implica $\left(y^{(k)}\right)^* \to x^*$ (ver [5]) cuando $k \to \infty$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \left(\left\|x - y^{(k)}\right\|_{p,s}\right)^s &= \lim_{k\to\infty} \sum_{m+n=1}^{\infty} \left(x - y^{(k)}\right)^*_{(m+n)} (m+n)^{s/p-1} \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \sum_{m+n=1}^{\infty} \left((x_m)^* - (y_n^{(k)})^*\right) (m+n)^{s/p-1} = 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Luego, por (b) y la desigualdad triangular se tiene

$$\left\|y^{(k)}\right\|_{(p,s)} \leq \|x\|_{(p,s)} \leq \left\|x^{(k)}\right\|_{(p,s)} + \left\|x - y^{(k)}\right\|_{(p,s)} .$$

Lo cual implica, por (1.14), $\left\|y^{(k)}\right\|_{(p,s)} \to \|x\|_{(p,s)}$ cuando $k \to \infty$. $\square$

1.1. Sucesiones de nivel y funciones Φ-concavas

Las funciones de nivel fueron introducidas por Halperin en [9] posteriormente en [13] Lorentz extendió el concepto y las empleó para demostrar que el operador $T(f) = \int_0^1 fgdx$ es continuo siendo f y g funciones decrecientes en $(0,1)$ y $f \in L_\phi$, encontrando además la constante óptima C en la desigualdad $\int_0^1 fgdx \leq C \|f\|_{L_\phi}$.

A continuación se presenta la noción de sucesión ϕ-concava , para después incursionar en un resultado que caracteriza a las sucesiones de nivel.

Definición 1.2. *Sea $\phi = (\phi_n)_n$ una sucesión de números positivos y $\Phi_n = \sum_{i=1}^n \phi_i$. Una sucesión $\tilde{X} = \left(\tilde{X}_n\right)_n$ se denomina ϕ-concava si, para arbitrarios $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ se tiene $\tilde{X}_n \geq L_n$, $n_1 \leq n \leq n_2$, donde $L_n = C\Phi_n + D$, C y D constantes positivas, tales que L interpola $\tilde{X}$ en n_1, n_2, es decir,*

$$\begin{aligned} L_{n_1} &= \tilde{X_{n_1}}, \\ L_{n_2} &= \tilde{X_{n_2}}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Teorema 1.3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

$$\tilde{X} = \left(\tilde{X}_n\right)_n \quad es \quad \phi concava. \tag{1.16}$$

$$\frac{\tilde{X}_n - \tilde{X}_{n_1}}{\Phi_n - \Phi_{n_1}} \geq \frac{\tilde{X}_{n_2} - \tilde{X_{n_1}}}{\Phi_{n_2} - \Phi_{n_1}}, \qquad 1 \leq n_1 \leq n \leq n_2. \tag{1.17}$$

$$\frac{\tilde{X}_n - \tilde{X}_{n_1}}{\Phi_n - \Phi_{n_1}} \geq \frac{\tilde{X}_{n_2} - \tilde{X}_n}{\Phi_{n_2} - \Phi_n}, \qquad 1 \leq n_1 \leq n < n_2. \tag{1.18}$$

$$\frac{\tilde{X}_{n_1} - \tilde{X}_{m_1}}{\Phi_{n_1} - \Phi_{m_1}} \geq \frac{\tilde{X}_{n_2} - \tilde{X}_{m_2}}{\Phi_{n_2} - \Phi_{m_2}}, \quad m_1 \leq m_2, n_1 \leq n_2, \quad m_1 \neq n_1, \quad m_2 \neq n_2. \tag{1.19}$$

Demostración. Supongamos que $\tilde{X} = \left(\tilde{X}_n\right)_n$ es ϕ-concava, por (1.15)

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{n_1} &= C\Phi_{n_1} + D, \\ \tilde{X}_{n_2} &= C\Phi_{n_2} + D. \end{aligned}$$

De donde se obtiene

$$D = \tilde{X}_{n_1} - C\Phi_{n_1}, \qquad C = \left[\tilde{X}_{n_2} - \tilde{X}_{n_1}\right] / \left[\Phi_{n_2} - \Phi_{n_1}\right]. \tag{1.20}$$

Reemplazando (1.20) en $\tilde{X}_n \geq L_n$, conseguimos

$$\tilde{X}_n - \tilde{X}_{n_1} \geq \left(\frac{\tilde{X}_{n_2} - \tilde{X}_{n_1}}{\Phi_{n_2} - \Phi_{n_1}} \right) (\Phi_n - \Phi_{n_1}).$$

De donde se tiene (1.17). De nuevo, dado que $\tilde{X}_n \geq L_n$, $D \leq \tilde{X}_n - C\Phi_n$ entonces

$$\tilde{X}_{n_2} \leq \tilde{X}_n + C\left[\Phi_{n_2} - \Phi_n\right] \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\tilde{X}_{n_2} - \tilde{X}_n}{\Phi_{n_2} - \Phi_n} \leq \frac{\tilde{X}_{n_2} - \tilde{X}_{n_1}}{\Phi_{n_2} - \Phi_{n_1}}.$$

Comparando la anterior desigualdad con (1.17) se obtiene (1.18).

Finalmente (1.19) se obtiene directamente comparando $\left[\tilde{X}_{m_2} - \tilde{X}_{n_1}\right] / \left[\Phi_{m_2} - \Phi_{x_{n_1}}\right]$ con la parte izquierda de (1.17) y con la parte derecha de (1.18).

□

En el siguiente teorema se presenta el concepto de sucesión de nivel y sus principales propiedades.

Teorema 1.4. *Sea $\phi = (\phi_n)_n$ una sucesión no negativa y $\Phi_n = \sum_{i=1}^n \phi_i$. Sea $x = (x_n)_n$ una sucesión no negativa y suponga que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n \phi_i} = 0. \tag{1.21}$$

Entonces exste una única sucesión no negativa $x^\circ = (x_n^\circ)_n$, denominada ***sucesión de nivel*** *respecto a $\phi = (\phi_n)_n$, que satisface las siguientes condiciones:*

a. $(x_n^\circ/\phi_n)_n$ *es decreciente;*

b. $\sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n x_i^\circ$ *para todo n, $n = 1, 2, ...$.*

c. El conjunto $\{n : x_n^\circ \neq x_n\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, *donde $\{I_k\}$ es una clase de conjuntos de números enteros positivos, $I_k = \{n_k, ..., n_k + m_k\}$ tales que* $\sum_{i\in I_k} x_i = \sum_{i\in I_k} x_i^\circ$, *y* $x_i^\circ/\phi_i = \lambda_k$ *para todo* $i \in I_k$.

Demostración. a. Sea $X_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} \phi_i} = 0$ implica la existencia de una sucesión $\tilde{X} = \left(\tilde{X}_n\right)_n$, la cual es ϕ- concava mayorante de X, en efecto dado $C > 0$ existe $N > 0$ tal que $X_m < C\Phi_m$ para todo $m \geq N$. Por lo tanto $\tilde{X}_n = C\Phi_n$, cuando $n \geq N$,es una función ϕ-concava mayotante de X. Sea $X_n^\circ = \inf \tilde{X}_n$, por (1.19) se obtiene

$$
\begin{aligned}
\frac{\tilde{X}_{k_1}}{\Phi_{k_1}} &\leq \frac{\tilde{X}_{k_2}}{\Phi_{k_2}} \quad \Leftrightarrow \\
\frac{\tilde{X}_{k_1}}{\tilde{X}_{k_2}} &\leq \frac{\Phi_{k_1}}{\Phi_{k_2}} \leq 1, \quad k_1 \leq k_2.
\end{aligned}
$$

Así que $\tilde{X}_{k_1} \leq \tilde{X}_{k_2}$, $k_1 \leq k_2$, es decir $X^\circ = \left(X_k^\circ\right)_k$ es creciente, por lo tanto es posible escribir X_n° como una suma telescópica, esto es, existe una única sucesión $x = (x_n^\circ)$ tal que

$$
\begin{aligned}
X_n^\circ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^\circ \quad \text{con} \quad x_1^\circ = X_1^\circ \\
x_n^\circ &= X_n^\circ - X_{n-1}^\circ.
\end{aligned} \tag{1.22}
$$

Además $X^\circ = \left(X_n^\circ\right)_n$ es ϕ-concava mayorante de X. En efecto, $\tilde{X}_n \geq L_n$ implica $\tilde{X}_n^\circ = \inf \tilde{X}_n \geq L_n$. Por otro lado si para n_1, n_2 arbitrarios, $\tilde{X}_{n_1} = c$, $L_{n_1} = \tilde{X}_{n_1}$, entonces $X_{n_1}^\circ = \inf \tilde{X}_{n_1} = c$, de la misma manera con n_2.

Empleando de nuevo (1.19) se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{X_n^\circ - X_{n-1}^\circ}{\Phi_n - \Phi_{n-1}} &\geq \frac{X_{n+1}^\circ - X_n^\circ}{\Phi_{n+1} - \Phi_n} \quad \Leftrightarrow \\
\frac{x_n^\circ}{\phi_n} &\geq \frac{x_{n+1}^\circ}{\phi_{n+1}}.
\end{aligned}
$$

Es decir, $\left(x_k^\circ/\phi_k\right)_k$ es decreciente.

b. Se tiene directamnte de la definición de X_n°.

c. Observe que por (1.22), X_{k-1}° y X_k° son iguales a X_{k-1} y a X_k respectivamente si y sólo si $x_k = x_k^\circ$. Ahora supongamos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $X_j^\circ > X_j$. Denotemos

$$n = \max\left\{k < j : X_k^\circ = X_k \quad \text{y} \quad X_{k-1}^\circ = X_{k-1}\right\} + 1$$

y

$$m = \min\left\{k > j : X_k^\circ = X_k \quad \text{y} \quad X_{k+1}^\circ = X_{k+1}\right\} - n + 1.$$

Considéremos una sucesión L de forma tal que interpole a X° en $n-1$ y $n+m-1$. Es decir $L_{n-1} = X^\circ_{n-1}$ y $L_{m+n-1} = X^\circ_{m+n-1}$. Entonces $L \geq X$, es decir, L es una sucesión ϕ-concava mayorante de X, además por definición $X^\circ \geq L$, pero X° es la función ϕ-concava mayorante de X minimal, entonces $X^\circ_j = L_j = C\Phi_j + D$, $j \in \{n-1, ..., m+n-1\}$. Además, si $j \in \{n, ..., m+n-1\}$ se tiene

$$\begin{aligned} x^\circ_j &= X^\circ_j - X^\circ_{j-1} \\ &= C\left(\Phi_j - \Phi_{j-1}\right) = C\phi_j. \end{aligned}$$

Por definición de $m+m-1$ y $n-1$, $x^\circ_{n-1} = x_{n-1}$ y $x^\circ_{m+n} = x_{m+n}$. Además

$$\begin{aligned} X^\circ_{n-1} &= X_{n-1} \\ X^\circ_{m+n-1} &= X_{m+n-1}. \end{aligned}$$

Restando las anteriores ecuaciones se obtiene

$$\sum_{i=n}^{m+n-1} x^\circ_i = \sum_{i=n}^{m+n-1} x_i.$$

Con lo que se finalza la demostración de (c).

$\square$

El siguiente lema presenta la desigualdad de *Karamata* empleada para demostrar una de las desigualdades posteriores.

Lema 1.5. *Sean $x = (x_k)_{k=1}^n$ y $y = (y_k)_{k=1}^n$ dos sucesiones de números que satisfacen las siguientes condiciones:*

a. $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_n$.

b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{j} x_k \geq \sum_{k=1}^{j} y_k$ *con* $1 \leq j \leq n-1$.

c. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k$.

Entonces para cualquier función convexa ϕ se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} \phi(x_k) \geq \sum_{k=1}^{n} \phi(y_k).$$

Demostración. Dado que ϕ es convexa $c_i = [\phi(y_i) - \phi(x_i)] \,/\, [y_i - x_i]$ es una sucesión decreciente. En efecto, sea $x_{i+1} \leq x \leq x_i$ entonces

$$\begin{aligned}
\phi(x) = \phi\left[\left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right) x_i + \left(\frac{x_i - x}{x_i - x_{i+1}}\right) x_{i+1}\right] &\leq \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right) \phi(x_i) + \left(\frac{x_i - x}{x_i - x_{i+1}}\right) \phi(x_{i+1}) \Leftrightarrow \\
\left(\frac{x_i - x_{i+1}}{x_i - x}\right) \phi(x) &\leq \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x}\right) \phi(x_i) + \phi(x_{i+1}) \quad \Leftrightarrow \\
\phi(x)\left[1 + \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x}\right] &\leq \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x}\right) \phi(x_i) + \phi(x_{i+1}) \quad \Leftrightarrow \\
\phi(x) - \phi(x_{i+1}) &\leq \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x}\right) [\phi(x_i) - \phi(x)] \quad \Leftrightarrow \\
\frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x)}{x_{i+1} - x} &\leq \frac{\phi(x_i) - \phi(x)}{x_i - x}.
\end{aligned}$$

Por lo anterior y $[\phi(x) - \phi(y)] \,/\, [x - y] = [\phi(y) - \phi(x)] \,/\, [y - x]$ se concluye que $(c_i)_i$ es una sucesión decreciente. Sea

$$X_j = \sum_{k=1}^{j} x_k, \qquad Y_j = \sum_{k=1}^{j} y_k, \qquad X_0 = Y_0.$$

Por *(c)* $X_n = Y_n$, además

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \phi(x_k) - \sum_{k=1}^{n} \phi(y_k) &= \sum_{k=1}^{n} [\phi(x_k) - \phi(y_k)] = \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - y_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k (X_k - X_{k-1} - Y_k + Y_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (X_k - Y_k) - \sum_{k=1}^{n} (X_{k-1} - Y_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} c_k (X_k - Y_k) - \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1} (X_{k-1} - Y_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} (c_k - c_{k+1}) (X_k - Y_k).
\end{aligned}$$

Por *(b)* y recordando que $(c_k)_k$ es decreciente, se concluye de la última igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} \phi(x_i) - \sum_{k=1}^{n} \phi(y_i) \geq 0.$$

$\square$

El siguiente lema será empleado para demostrar una de las desigualdades que relaciona la norma $\|.\|_{p,s}$ de una sucesión $x = (x_n)_n \in \ell^{p,s}$ y su correspondiente sucesión de nivel $x^\circ = (x_n^\circ)_n$ respecto a una sucesión $\phi = (\phi_n)_n$ dada.

Lema 1.6. *Sea* $1 \leq p < s < \infty$ *y*

$$C_{ps} = \sup_{m,n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} k^{s/p-1} \right)^{1/s} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} k^{s'/p'-1} \right)^{1/s'}. \tag{1.23}$$

Entonces

$$C_{ps} = \left(\frac{p}{s}\right)^{1/s} \left(\frac{p'}{s'}\right)^{1/s'}. \tag{1.24}$$

Demostración. Primero se mostrará que

$$C_{ps} = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^{s/p-1} \right)^{1/s} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^{s'/p'-1} \right)^{1/s'} \tag{1.25}$$

Observe que la parte derecha de (1.25), equivale a fijar $m = 1$ en (1.23). Por lo tanto

$$C_{ps} \geq \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^{s/p-1} \right)^{1/s} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^{s'/p'-1} \right)^{1/s'}.$$

Resta por demostrar que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^{s/p-1} \right)^{1/s} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^{s'/p'-1} \right)^{1/s'} \geq \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\sup_{m\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} k^{s/p-1} \right)^{1/s} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} k^{s'/p'-1} \right)^{1/s'} \right]. \tag{1.26}$$

Luego (1.26) se cumple si

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^{s/p-1} \right)^{1/s} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^{s'/p'-1} \right)^{1/s'} \geq \sup_{m\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} k^{s/p-1} \right)^{1/s} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} k^{s'/p'-1} \right)^{1/s'}.$$

Entonces es suficiente demostrar que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k^{s/p-1} \right)^{1/s} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{s'/p'-1} \right)^{1/s'} \geq \left(\sum_{k=m}^{m+n-1} k^{s/p-1} \right)^{1/s} \left(\sum_{k=m}^{m+n-1} k^{s'/p'-1} \right)^{1/s'} \tag{1.27}$$

para todo $m \geq 1$. (1.27) se puede escribir como sigue haciendo un cambio de subíndice en la parte derecha de la desigualdad.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k^{s/p-1}\right)^{s'/s}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{s'/p'-1}\right)$$
$$\geq \left(\sum_{k=1}^{n} (k+m-1)^{s/p-1}\right)^{s'/s}\left(\sum_{k=1}^{n} (k+m-1)^{s'/p'-1}\right). \quad (1.28)$$

Fijemos $m \geq 1$. Observese que si $m = 1$ se obtiene la igualdad. Supongamos entonces que $m > 1$. Sea $x_k = k^{s'/p'-1}$, $z_k = (k+m-1)^{s'/p'-1}$ y $r = -s/s'$.

Observe además que

$$\begin{aligned} x_k^r &= \left(k^{s'/p'-1}\right)^{-s/s'} = k^{s/p-1} \quad \text{y} \\ z_k^r &= \left[(k+m-1)^{s'/p'-1}\right]^{-s/s'} = (k+m-1)^{s/p-1}. \end{aligned}$$

Entonces (1.28) equivale a

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^r\right)^{1/r}} \geq \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^r\right)^{1/r}}. \quad (1.29)$$

Notése además que $s' < p'$, luego $(x_k)_k$ y $(z_k)_k$ son decrecientes. Sea $X_n/Z_n = C$ donde $X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ y $Z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$. Dado que $m-1 \geq 0$

$$\begin{aligned} k^2 + mk &\leq k^2 + mk + m - 1 \quad \Leftrightarrow \\ k(m+k) &\leq (k+1)(k+m-1) \quad \Leftrightarrow \\ \frac{k}{k+m-1} &\leq \frac{k+1}{m+k} \Leftrightarrow \\ \left(\frac{k+1}{m+k}\right)^{s'/p'-1} &\leq \left(\frac{k}{k+m-1}\right)^{s'/p'-1}. \end{aligned}$$

Es decir, $(x_k/z_k)_k$ es decreciente, en consecuencia $(X_k/Z_k)_k$ también es decreciente. Entonces $X_k/Z_k \geq C$ para $k \leq n-1$. Aplicando la *desigualdad de Karamata* considerando $\phi(t) = t^r$ y las sucesiones $(x_k)_k$, $(y_k)_k$ donde $y_k = Cz_k$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} x_k^r &\geq \sum_{k=1}^{n} (C z_k)^r \quad \Leftrightarrow \\
\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^r\right)^{1/r} &\leq C \left(\sum_{k=0}^{n} z_k^r\right)^{1/r} \quad \Leftrightarrow \\
\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^r\right)^{1/r} &\leq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sum_{k=1}^{n} z_k} \left(\sum_{k=1}^{n} z_k^r\right)^{1/r} .
\end{aligned}
$$

De donde se deduce (1.29) y en consecuencia (1.26). Finalmente (1.24) se deduce del teorema 15 en [8].

□

El siguiente teorema muestra las constantes óptimas entre las normas de una sucesión $x = (x_n)_n \in \ell^{p,s}$ y su correspondiente sucesión de nivel $x^\circ = (x_n^\circ)_n$ respecto a la sucesión $\phi_n = n^{1-s'/p'}$.

Teorema 1.5. *Sea $x = (x_n)_n \in \ell^{p,s}$ una sucesión no negativa y decreciente y sea $x^\circ = (x_n^\circ)_n$ la sucesión de nivel respecto a $\phi_n = n^{-\alpha}$, $\alpha = 1 - \frac{s'}{p'}$. Entonces*

$$
\|x^\circ\|_{p,s} \leq \|x\|_{p,s} \leq \left(\frac{p}{s}\right)^{1/s} \left(\frac{p'}{s'}\right)^{1/s'} \|x^\circ\|_{p,s} . \tag{1.30}
$$

Demostración. Supóngase primero que $s < \infty$ y consideremos la desigualdad de la izquierda. Por el teorema 1.3-(c) obtenemos $x_j^\circ = \lambda_k$, $j \in I_k$. Como $\alpha = \frac{s/(p-1)}{s-1}$

$$
\lambda_k^{s-1} = (x_j^\circ)^{s-1} j^{s/(p-1)} \tag{1.31}
$$

Aplicando la desigualdad inversa Hölder, la ecuación (1.31) y el teorema 1.3-(c) se tiene

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\in I_k} (x_j^\circ)^s j^{s/p-1} &= \sum_{j\in I_k} (x_j^\circ)^{s-1} (x_j^\circ) j^{s/p-1} \\
&= \lambda_k^{s-1} \sum_{j\in I_k} x_j^\circ = \left(\sum_{j\in I_k} j^{-\alpha}\right)^{1-s} \left(\sum_{j\in I_k} x_j\right)^{s-1} \left(\sum_{j\in I_k} x_j^\circ\right) \\
&= \left(\sum_{j\in I_k} j^{-\alpha}\right)^{1-s} \left(\sum_{j\in I_k} x_j\right)^{s-1} \left(\sum_{j\in I_k} x_j\right) = \left(\sum_{j\in I_k} j^{-\alpha}\right)^{1-s} \left(\sum_{j\in I_k} x_j\right)^{s} \\
&= \left(\sum_{j\in I_k} \left(j^{s/(p-1)}\right)^{1/(s-1)}\right)^{1-s} \left(\sum_{j\in I_k} (x_j^s)^{1/s}\right)^{s} \leq \sum_{j\in I_k} x_j^s j^{s/p-1}.
\end{aligned}
$$

Dado que x° es decreciente $x^\circ = (x^\circ)^*$. Además por el Teorema 1.3 es suficiente tomar las sumas en donde difieren $(x_n^\circ)_n$ y $(x_n)_n$, esto es, en los I_k. En consecuencia

$$\|x^\circ\|_{p,s} \leq \|x\|_{p,s} .$$

Consideremos ahora $\psi = (\psi_n)_n$, $\psi_n = x_n^{s-1} n^{s/p-1}$ $(n \geq 1)$ y sea $\tilde{\psi} = (\tilde{\psi}_n)_n$ la sucesión de nivel de $\psi = (\psi_n)_n$ con respecto a $\varphi = (\varphi_n)_n$, $\varphi_n = 1$. Aplicando la parte (b) del lema 1.1, el teorema 1.3-(b) y la desigualdad de Hölder para espacios de Lorentz se obtiene

$$\begin{aligned}
\|x\|_{p,s}^s &= \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^*)^s n^{s/p-1} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* (x_n^*)^{s-1} n^{s/p-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \psi_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n \psi_n \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n \tilde{\psi}_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n^\circ \tilde{\psi}_n \\
&\leq \|x\|_{p,s} \leq \left\|\tilde{\psi}\right\|_{p',s'} .
\end{aligned}$$

Por la anterior desigualdad, para demostrar la parte derecha de (1.30) es suficiente probar que

$$\left\|\tilde{\psi}\right\|_{p',s'} \leq \left(\frac{p}{s}\right)^{1/s} \left(\frac{p'}{s'}\right)^{1/s'} \|x\|_{p,s}^{s-1} . \tag{1.32}$$

Sea $E = \left\{n \geq 1 : \quad \tilde{\psi}_n = \psi_n\right\}$. Entonces $\mathbb{N}^* \setminus E = \bigcup_k I_k$. Donde $\{I_k\}$ es una clase disjunta. Observe que por el Teorema 1.3-(c) $\tilde{\psi}_n$ es constante en cada uno de los conjuntos I_k si $n \in I_k$.Por lo tanto

$$\tilde{\psi}_n = \frac{1}{\# I_k + 1} \sum_{j \in I_k} \psi_j \tag{1.33}$$

Por otro lado, usando la desigualdad de Hölder se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in I_k} \psi_j = \sum_{j \in I_k} x_j^{s-1} j^{s/p-1} &= \sum_{j \in I_k} x_j \left(j^{s/p-1}\right)^{1/s} \left(j^{s/p-1}\right)^{1/s'} \\
&\leq \left(\sum_{j \in I_k} j^{s/p-1}\right)^{1/s} \left(\sum_{j \in I_k} j^{s/p-1} (x_j)^{s'(s-1)}\right)^{1/s'} \\
&= \left(\sum_{j \in I_k} j^{s/p-1} x_j^s\right)^{1/s'} .
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Observe además que por la definición de E

$$\sum_{n\in E}(\tilde{\psi}_n)^{s'}n^{s'/p'-1} = \sum_{n\in E}(\psi_n)^{s'}n^{s'/p'-1} = \sum_{n\in E}\left[x_n^{s-1}n^{s/p-1}\right]^{s'}n^{s'/p'-1}$$
$$= \sum_{n\in E}x_n^{s'(s-1)}n^{ss'/p-s'}n^{s'/p'-1} = \sum_{n\in E}x_n^s n^{s/p-1}.$$

Es decir que $\left\|\tilde{\psi}\right\|_{p',s'} = \|x\|_{p,s}$ en E. Ahora nos restringimos a los conjuntos I_k, por (1.33) y (1.34) se deduce

$$\sum_{n\in I_k}(\tilde{\psi}_n)^{s'}n^{s'/p'-1} = \frac{1}{(1+\#I_k)^{s'}}\left(\sum_{n\in I_k}n^{s'/p'-1}\right)\left(\sum_{j\in I_k}\psi_j\right)^{s'}$$
$$\leq \frac{1}{(1+\#I_k)^{s'}}\left(\sum_{n\in I_k}n^{s'/p'-1}\right)\left(\sum_{m\in I_k}m^{s/p-1}\right)^{s'/s}\left(\sum_{m\in I_k}x_m^s m^{s/p-1}\right).$$

Donde

$$C_{ps,k} = \frac{1}{(1+\#I_k)}\left(\sum_{n\in I_k}n^{s'/p'-1}\right)^{1/s'}\left(\sum_{n\in I_k}n^{s/p-1}\right)^{1/s}$$
$$= \left(\frac{1}{1+\#I_k}\sum_{n\in I_k}n^{s'/p'-1}\right)^{1/s'}\left(\frac{1}{1+\#I_k}\sum_{n\in I_k}n^{s/p-1}\right)^{1/s}.$$

Por el Lema 1.5 aplicado a $C_{ps,k}$ se consigue (1.32) y por lo tanto (1.30) queda demostrado cuando $s<\infty$. Consideremos ahora $s=\infty$, es decir , cuando $\alpha = 1/p$. Empleando la desigualdad de Hölder se deduce

$$\begin{aligned}\sum_{n\in I_k}\lambda_k n^{-1/p} &= \sum_{n\in I_k}x_n^\circ = \sum_{n\in I_k}x_n 1\\ &\leq \|x\|_{p,\infty}\|1\|_{p',1} = \|x\|_{p,\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1/p}.\end{aligned}$$

Entonces $\lambda_k \leq \|x\|_{p,\infty}$ para cada k. Además la igualdad $\lambda_k = x_j^\circ/j^{-\alpha}$, $j\in I_k$, indica que

$$x_j^\circ j^{1/p} \leq \|x\|_{p,\infty} \quad \Leftrightarrow$$
$$\|x^\circ\|_{p,\infty} = \sup_{j>0}\left(j^{1/p}x_j^\circ\right) \leq \|x\|_{p,\infty}.$$

Con lo cual se demuestra la parte izquierda de (1.30). Por otro lado, dado que $(x_k)_k$ es decreciente

$$nx_n \leq \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Entonces por la desigualdad de Hölder, la ecuación anterior y el Teorema 1.3-(b)

$$\begin{aligned}
x_n n^{1/p} &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) n^{1/p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^\circ\right) n^{1/p-1} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i^\circ\right) n^{1/p} \leq n^{1/p} \left\| \frac{1}{n} \right\|_{p',1} \|x^\circ\|_{p,\infty} \\
&= n^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i^{1/p'-1}}{n}\right) \sup_{1\leq i\leq n} \left(i^{1/p} x_i^\circ\right) = n^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i^{-1/p}}{n}\right) \sup_{1\leq i\leq n} \left(i^{1/p} x_i^\circ\right).
\end{aligned}$$

Se concluye que

$$\sup_{n\geq 1} \left(n^{1/p} x_n\right) \leq \sup_{n\geq 1} \left[\frac{n^{1/p} \sum_{i=1}^{n} i^{-1/p}}{n} \sup_{1\leq i\leq n} \left(i^{1/p} x_i^\circ\right)\right] = C_p \|x^\circ\|_{p,\infty} \tag{1.35}$$

Donde

$$C_p = \sup_{n\geq 1} \left[\frac{n^{1/p} \sum_{i=1}^{n} i^{-1/p}}{n}\right].$$

Observe que $C_p \leq p'$, en efecto, la función $g(t) = t^{-1/p}$ es decreciente, por tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^{-1/p} &\leq \int_0^n t^{-1/p} dt \quad \Leftrightarrow \\
n^{1/p-1} \sum_{k=1}^{n} k^{-1/p} &\leq n^{1/p-1} \int_0^n t^{-1/p} dt \quad \Leftrightarrow \\
\sup_{n>0} \left[n^{1/p-1} \sum_{k=1}^{n} k^{-1/p}\right] &\leq \sup_{n>0} \left[n^{1/p-1} \int_0^n t^{-1/p} dt\right] \quad \Leftrightarrow \\
\sup_{n>0} \left[n^{1/p-1} \sum_{k=1}^{n} k^{-1/p}\right] &\leq \sup_{n>0} \left[p' n^{1/p-1} n^{1/p'}\right] = p'.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Así que por (1.35) y (1.36) se infiere que

$$\|x\|_{p,\infty} \leq p' \|x^\circ\|_{p,\infty}$$

Y con esto se concluye la demostración.

$\square$

1.2. Sucesiones de nivel y la norma dual

Esta sección tiene como propósito presentar las principales propiedades de la norma dual $\|.\|'_{p,s}$, algunas de las cuales son expuestas en el siguiente teorema. En lo que sigue, si $x = (x_k)_k$ y $y = (y_k)_k$, $x \prec y$ significará que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 1.6. *Sea $1 < p < \infty$, $1 \leq s \leq \infty$, y $x = (x_n)_n \in \ell^{p,s}$. Entonces*

a.

$$\|x\|'_{p,s} \leq \|x\|_{p,s}. \tag{1.37}$$

b. Si $s \leq p$ se tiene

$$\|x\|'_{p,s} = \|x\|_{p,s}. \tag{1.38}$$

c. Si $p < s \leq \infty$ y si la sucesión $\left(x_n^* n^{1-s'/p'}\right)_n$ es no creciente, (1.38) se cumple.

d. Si $x = (x_n)_n \in \ell^{p,s}$, entonces

$$\|x\|'_{p,s} \leq \inf_{x \prec z} \|z\|_{p,s}. \tag{1.39}$$

Demostración. a. Por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} \|x\|'_{p,s} &= \sup_{y} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n : \quad \|y\|_{p',s'} = 1 \right\} \\ &\leq \sup_{y} \left\{ \|x\|_{p,s} \|y\|_{p',s'} : \quad \|y\|_{p',s'} = 1 \right\} \\ &= \|x\|_{p,s}. \end{aligned}$$

b. Consideremos $\psi = (\psi_n)_n$, con $\psi_n = (x_n^*)^{s-1} n^{s/p-1}$, $(n \geq 1)$. Observe que la sucesión $\psi = (\psi_n)_n$ es no creciente, entonces

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{p',s'}^{s'} &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^{s'} n^{s'/p'-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(x_n^*)^{s-1} n^{s/p-1} \right]^{s'} n^{s'/p'-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(x_n^*)^{s'(s-1)} n^{s's/p-s} \right] n^{s'/p'-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^*)^s n^{s/p-1} = \|x\|_{p,s}^{s}. \end{aligned}$$

y

$$\|x\|_{p,s}^s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \psi_n.$$

Sea $y_n = \psi_n / \|\psi\|_{p',s'}$, es decir que $\|\psi\|_{p',s'} = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\|x\|_{p,s}^s &= \|\psi\|_{p',s'} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* y_n \quad \Leftrightarrow \\
\frac{\|x\|_{p,s}^s}{\|\psi\|_{p',s'}} &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* y_n \quad \Leftrightarrow \\
\frac{\|x\|_{p,s}^s}{\|x\|_{p,s}^{s/s'}} &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* y_n \quad \Leftrightarrow \\
\|x\|_{p,s} &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* y_n \leq \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^* y_n : \quad \|y\|_{p',s'} = 1\right\} \\
&= \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n : \quad \|y\|_{p',s'} = 1\right\} = \|x\|_{p,s}'.
\end{aligned}$$

Y por (a) se concluye que $\|x\|_{p,s} = \|x\|_{p,s}'$.

c. La demostración se realiza de forma similar a la parte (b).

d. Si $x \prec z$ e $y = (y_n)_n$ es no creciente, invocando el lema 1.1 y la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n &\leq \sum_{n=1}^{\infty} y_n z_n \\
&\leq \|z\|_{p,s} \|y\|_{p',s'}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \leq \inf_{x \prec z} \Big(\|z\|_{p,s} \|y\|_{p',s'} \Big).$$

Por lo tanto

$$\|x\|'_{p,s} \leq \operatorname*{ínf}_{x\prec z} \|z\|_{p,s}.$$

$\square$

El siguiente teorema plantea la igualdad entre la norma dual de una sucesión no creciente $x = (x_n)_n \in \ell^{p,s}$ y de la norma estándar de su correspondiente sucesión de nivel respecto a la sucesión $\phi_n = n^{1-\frac{s'}{p'}}$.

Teorema 1.7. *Sea $1 < p < s \leq \infty$, y $x = (x_n)_n \in \ell^{p,s}$ una sucesión no negativa y no creciente. Sea $\alpha = 1 - \frac{s'}{p'}$ y $\phi^{(\alpha)} = (\phi_n^{(\alpha)})_n$, donde $\phi_n^{(\alpha)} = n^{-\alpha}$. Entonces*

$$\|x\|'_{p,s} = \operatorname*{ínf}_{x\prec z} \|z\|_{p,s} = \|x^\circ\|_{p,s},$$

donde $x^\circ = (x_n^\circ)_n$ es la sucesión de nivel de $x = (x_n)_n$ con respecto a la sucesión $\phi^{(\alpha)} = (\phi_n^{(\alpha)})_n$.

Demostración. Dado que $x \prec x^\circ$, si $(y_n)_n$ es una sucesión no negativa y no creciente se tiene, por lema 1.1 que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n^\circ y_n,$$

Así que

$$\|x\|_{p,s} \leq \|x^\circ\|_{p,s}.$$

Además, por el teorema anterior $\operatorname{ínf}_{x\prec z} \|z\|_{p,s} \leq \|x^\circ\|_{p,s}$. Es decir que es suficiente demostrar que

$$\|x\|'_{p,s} \geq \|x^\circ\|_{p,s}.$$

Sea $E = \{n \geq 1 : \quad x_n = x_n^\circ\}$. De acuerdo con el teorema 1.4, $\mathbb{N} \setminus E = \bigcup_k I_k$, donde los I_k son los conjuntos de números naturales que satisfacen

$$\sum_{I_k} x_n = \sum_{I_k} x_n^\circ.$$

Primero supongamos que $s < \infty$ y que $\psi = (\psi_n)_n$, con $\psi_n = (x_n^\circ)^{s-1} n^{s/p-1}$, $(n \geq 1)$. Entonces

$$\|\psi\|_{p',s'} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^{s'} n^{s'/p'-1} = \|x^\circ\|_{p,s}.$$

Considérese $y_n = \psi_n / \|x^\circ\|_{p,s}^{s-1}$, por tanto $\|y\|_{p',s'} = 1$, en efecto:

$$
\begin{aligned}
\|y\|_{p',s'} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}(y_n^*)^{s'}n^{s'/p'-1}\right)^{1/s'}\\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_n^{s'}}{\|x^\circ\|_{p,s}^{s'(s-1)}}\right)n^{s'/p'-1}\right)^{1/s'} = \frac{1}{\|x^\circ\|_{p,s}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n^\circ)^s n^{s/p-1}\right)^{1/s'}\\
&= \frac{\|x^\circ\|_{p,s}}{\|x^\circ\|_{p,s}} = 1.
\end{aligned}
$$

El teorema 1.4 afirma que para cada k, $x_n^\circ = \lambda_k n^{-\alpha}$, $n \in I_k$, donde $\alpha = 1-s'/p'$. En consecuencia

$$
\begin{aligned}
\lambda_k^{s-1} &= \frac{(x_n^\circ)^{s-1}}{(n^{s'/p'-1})^{s-1}} = \frac{(x_n^\circ)^{s-1}}{n^{1-s/p}}\\
&= (x_n^\circ)^{s-1}n^{s/p-1} = \psi_n.
\end{aligned}
$$

Además, empleando el teorema 1.4

$$
\begin{aligned}
\|x^\circ\|_{p,s}^{s-1}\sum_{n\in I_k}x_n y_n &= \sum_{n\in I_k}x_n\psi_n = \lambda_k^{s-1}\sum_{n\in I_k}x_n\\
&= \lambda_k^{s-1}\sum_{n\in I_k}x_n^\circ = (x_n^\circ)^{s-1}n^{\alpha(s-1)}\sum_{n\in I_k}x_n^\circ\\
&= \sum_{n\in I_k}(x_n^\circ)^s n^{s/p-1}.
\end{aligned}
$$

Poro otro lado

$$
\begin{aligned}
\|x\|_{p,s}^{s-1}\sum_{n\in E}x_n y_n &= \sum_{n\in E}x_n\psi_n = \sum_{n\in E}x_n^\circ\psi_n\\
&= \sum_{n\in E}x_n^\circ(x_n^\circ)^{s-1}n^{s/p-1} = \sum_{n\in E}(x_n^\circ)^s n^{s/p-1}.
\end{aligned}
$$

Entonces, en cualquier caso

$$
\|x^\circ\|_{p,s}^{s-1}\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n = \|x^\circ\|_{p,s}^{s}.
$$

Es decir

$$
\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n = \|x^\circ\|_{p,s}.
$$

Y por definición de la norma dual obtenemos

$$\begin{aligned}\|x\|'_{p,s} = \quad & \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n : \quad \|y\|_{p',s'} = 1\right\} \\ \geq \quad & \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \|x^\circ\|_{p,s}.\end{aligned}$$

Ahora, si $s = \infty$. Sea $I_1 = \{1, 2, ..., m\}$ y $y = (y_n)_n$, donde

$$y_n = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} i^{-1/p}} & \text{si } n \leq m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$\begin{aligned}\|y\|_{p',1} &= \sum_{n=1}^{m} y_n n^{1/p'-1} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} i^{-1/p}} \sum_{n=1}^{m} n^{-1/p} = 1.\end{aligned}$$

Además, como $x^\circ = (x_n^\circ)$ es la sucesión de nivel respecto a $\phi_n = n^{-\alpha}$

$$\frac{x_n^\circ}{n^{-1/p}} = \lambda_1, \qquad n \in \{1, 2, ..., m\}.$$

Con lo cual

$$\begin{aligned}\|x^\circ\| &= \sum_{n\geq 0} n^{1/p} x_n^\circ \\ &= \sup_{n\geq 0} \left(n^{1/p} n^{-1/p} \lambda_1\right) = \lambda_1.\end{aligned} \tag{1.40}$$

Por otro lado

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} i^{-1/p}} \sum_{n=1}^{m} x_n^\circ = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} i^{-1/p}} \sum_{n=1}^{m} \lambda_1 n^{-1/p} = 1. \tag{1.41}$$

Por (1.40) y (1.41) llegamos a

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n &= \frac{1}{\sum_{n=1}^{m} i^{-1/p}} \sum_{n=1}^{m} x_n \\
&= \frac{1}{\sum_{n=1}^{m} i^{-1/p}} \sum_{n=1}^{m} x_n^{\circ} = \lambda_1 = \|x^{\circ}\|_{p,\infty}.
\end{aligned}
$$

En consecuencia

$$
\begin{aligned}
\|x\|_{p,\infty}' &= \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n : \quad \|y\|_{p',1} = 1 \right\} \\
&\geq \sum_{n=1}^{m} x_n y_n = \|x^{\circ}\|_{p,\infty}.
\end{aligned}
$$

Con lo que se concluye la demostración.

□

El siguiente teorema ofrece una estimación de la norma estándar via la norma dual.

Teorema 1.8. *Sea $1 < p < \infty$ y $p < s \leq \infty$. Entonces para cualquier sucesión no creciente $x = (x_n)_n \in \ell^{p,s}$ se tiene la siguiente desigualdad*

$$
\|x\|_{p,s} \leq \left(\frac{p}{s}\right)^{1/s} \left(\frac{p'}{s'}\right)^{1/s'} \|x\|_{p,s}'
$$

Demostración. Se deduce directamente de los teoremas 1.5 y 1.7. □

1.3. Norma de descomposición y la desigualdad triangular en $\ell^{p,s}$

En esta sección se establecen, via el siguiente lema, la igualdad entre la norma dual y la norma de descomposición además se establece una desigualdad triangular en $\ell^{p,s}$ con constante óptima.

Lema 1.7. *Sean $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq .... \geq \alpha_p$ números positivos y $\{\eta_{jk}\}$ una matriz de tamaño $N \times p$ de números positivos, $1 \leq j \leq N$, $1 \leq k \leq p$. Sea*

$$\beta_k = \sum_{j=1}^{N} \eta_{jk}, \quad k = 1, ..., p.$$

Supongamos que

$$\beta_1 + ... + \beta_k \geq \alpha_1 + ... + \alpha_k,$$

para cualquier $k = 1, 2, ..., p$. Sea $\eta = \max\{\eta_{jk}\}$. Entonces para cualquier $j = 1, ..., N$ existe una permutación $(\tilde{\eta}_{jk})_{k=1}^{p}$ de la p- upla $\{\eta_{jk}\}_{k=1}^{p}$ tal que

$$\alpha_k \leq \tilde{\beta}_k + \eta, \quad donde \quad \tilde{\beta}_k = \sum_{j=1}^{N} \tilde{\eta}_{jk}, \tag{1.42}$$

para cualquier $k = 1, 2, ..., p$.

Demostración. Razonemos por inducción, para $p = 1$ el lema se sigue sin dificultad. Supongamos que es cierto para p. Si $\beta_k \geq \alpha_1$, para $k = 1, ..., p$ entonces no hay nada que demostrar porque

$$\beta_1 + ... + \beta_k \geq k\alpha_1 \geq \alpha_1 + ... + \alpha_k$$

para todo k=1,...,p. Supongamos que no es así. Sea

$$s = \min\{k : \beta_k < \alpha_1\}.$$

Nótese que $s \geq 2$ ya que por hipotesis $\beta_1 \geq \alpha_1$. Definamos $\gamma_0 = \beta_1$, $\gamma_N = \beta_s$ y

$$\gamma_m = \sum_{j=1}^{m} \eta_{js} + \sum_{j=m+1}^{N} \eta_{j1}, \quad \text{para} \quad 1 \leq m < N.$$

$\gamma_0 \geq \alpha_1$ y $\gamma_N < \alpha_1$. Denotemos m_0 como sigue

$$m_0 = \min\{m : \gamma_m < \alpha_1\}.$$

Por otro lado

$$|\gamma_m - \gamma_{m-1}| = |\eta_{ms} - \eta_{mq}| \leq \eta,$$

para cualquier $m = 1, ..., N$. En consecuencia

$$|\gamma_{m_0} - \gamma_{m_0-1}| \leq \eta,$$

por lo anterior y la minimalidad de m_0 se tiene

$$\gamma_{m_0} < \alpha_1 \leq \gamma_{m_0-1} \leq \gamma_{m_0} + \eta. \tag{1.43}$$

Sea

$$\tilde{\eta}_{j1} = \begin{cases} \eta_{js} & \text{si } 1 \leq j \leq m_0 \\ \eta_{j1} & \text{si } m_0 < j \leq N, \end{cases}$$

$$\eta'_{j1} = \begin{cases} \eta_{j1} & \text{si } 1 \leq j \leq m_0 \\ \eta_{js} & \text{si } m_0 < j \leq N, \end{cases}$$

y $\eta'_{jk} = \eta_{jk}$, $(j = 1, ..., N)$, si $k \neq 1, s$. Por (1.43) tenemos

$$\tilde{\beta}_1 < \alpha_1 \leq \tilde{\beta}_1 + \eta, \quad \text{donde} \quad \tilde{\beta}_1 = \gamma_{m_0} = \sum_{j=1}^{N} \tilde{\eta}_{j1}. \tag{1.44}$$

Denotemos

$$\beta'_s = \sum_{j=1}^{N} \eta'_{js},$$

y $\beta'_k = \beta_k$ para $k = 2, ..., p$, $k \neq s$. Consideremos primero $s = 2$. Tenemos

$$\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_k \geq \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k,$$

para cada $k \geq 2$. Obsérvese además que $\beta_1 + \beta_2 = \tilde{\beta}_1 + \beta'_2$, en efecto

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_1 + \beta'_2 &= \sum_{j=1}^{m_0} \eta_{j2} + \sum_{j=m_0+1}^{N} \eta_{j1} + \sum_{j=1}^{m_0} \eta_{j1} + \sum_{j=m_0+1}^{N} \eta_{j2} \\ &= \sum_{j=1}^{N} \eta_{j1} + \sum_{j=1}^{N} \eta_{j2} = \beta_1 + \beta_2. \end{aligned}$$

Además por (1.44) y la anterior igualdad se obtiene

$$\beta_2' + ... + \beta_k' \geq \alpha_2 + ... + \alpha_k, \quad k = 2, ..., p. \tag{1.45}$$

Ahora supongamos que $s > 2$. Por la condición de minimalidad impuesta sobre s tiene que para cada $2 \leq r < s$

$$\beta_r' = \beta_r \geq \alpha_1 \geq \alpha_r$$

y por lo tanto

$$\beta_2' + ... + \beta_k' \geq \alpha_2 + ... + \alpha_k, \quad 2 \leq k < s. \tag{1.46}$$

Consideremos el caso $k \geq s$. En razón a

$$\tilde{\beta}_1 + \beta_s' = \beta_1 + \beta_s,$$

se observa que

$$\tilde{\beta}_1 + \beta_2' + ... + \beta_k' = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_k.$$

De nuevo, empleando (1.44) y (1.42) se concluye

$$\beta_2' + ... + \beta_k' \geq \alpha_2 + ... + \alpha_k. \tag{1.47}$$

Finalmente, por (1.44) y aplicando la hipótesis de inducción a (1.45), (1.46) y (1.47) se obtiene el resultado.

□

El siguiente teorema establece la igualdad entre la *norma dual* y la *norma de descomposición*.

Teorema 1.9. *Sea* $1 < p < \infty$ *y* $1 \leq s \leq \infty$. *Entonces para cualquier sucesión* $x = (x_n)_n \in \ell^{p,s}$

$$\|x\|_{p,s}' = \|x\|_{(p,s)}.$$

Demostración. Supongamos $1 < p < s \leq \infty$. Se demostrará primero la siguiente desigualdad

$$\|x\|_{p,s}' \leq \|x\|_{(p,s)}. \tag{1.48}$$

Sea $y = (y_n)_n \in \ell^{p',s'}$ y $x = \sum_{k=1}^{N} x^{(k)}$. Entonces, por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{N} x_n^{(k)} \right| |y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N} \left| x_n^{(k)} \right| |y_n| \\
&= \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} \left| x_n^{(k)} y_n \right| \leq \sum_{k=1}^{N} \left\| x^{(k)} \right\|_{p,s} \|y\|_{p',s'}.
\end{aligned}$$

Tomando el ínfimo sobre todas las representaciones $x = \sum_{k=1}^{N} x^{(k)}$ se obtiene

$$\|x\|'_{p,s} \leq \|x\|_{(p,s)} .$$

Resta por demostrar que

$$\|x\|'_{p,s} \leq \|x^{\circ}\|_{p,s} . \tag{1.49}$$

Empleando el teorema 1.2 es suficiente considerar sucesiones no negativas y no crecientes. Supongamos sin pérdida de generalidad que existe n_0 tal que $x_i = 0$ para $i > n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Por el teorema 1.4 existe n_1 tal que $x_i^{\circ} = 0$ para $i > n_1$, $n_1 \in \mathbb{N}^*$. Sea $k_0 = \max\{n_0, n_1\}$. De acuerdo al Teorema 1.7 se tiene

$$\|x\|'_{p,s} = \|x^{\circ}\|_{p,s} .$$

Donde $x^{\circ} = (x_n^{\circ})_n$ es la sucesión de nivel de $x = (x_n)_n$ con respecto a $\phi = (\phi_n)_n$, $\phi_n = n^{-\alpha}$, $\alpha = 1 - s'/p'$.

Sea $\delta = \delta(\epsilon, k_0) > 0$ tal que $\delta < \epsilon \left(1/ \|z\|_{p,s}\right)$ donde

$$z_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq k_0 \\ 0, & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

Escojamos $N \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\max_i x_i^{\circ} < N\delta.$$

Empleando el lema 1.7 con $\alpha_k = x_k$, $\beta_k = x_k^{\circ}$, $\eta_{jk} = x_k^{\circ}/N$, $1 \leq k \leq k_0$, $1 \leq j \leq N$, existe una permutación $\tilde{\eta}_{jk}$ de η_{jk} tal que

$$x_k \leq \sum_{j=1}^{N} \tilde{\eta}_{jk} + \delta, \quad \forall k \leq k_0.$$

Sea $t^{(j)} = (t_k^{(j)})$, donde $t_k^{(j)} = \tilde{\eta}_{jk}$. Como $\tilde{\eta}_{jk}$ es una permutación de η_{jk}, entonces $t^{(j)}$y x°/N son equimedibles en consecuencia

$$\left\|t^{(j)}\right\|_{p,s} = \frac{\|x^{\circ}\|_{p,s}}{N}, \quad j \leq N.$$

De las últimas tres ecuaciones y de la definición de la norma de descomposición se concluye

$$\|x\|_{(p,s)} \leq \sum_{j=1}^{N} \left\|t^{(j)}\right\|_{p,s} + \delta \|z\|_{p,s} \leq \|x^{\circ}\|_{p,s} + \epsilon.$$

Dado que ϵ es arbitrario, se tiene que

$$\|x\|_{(p,s)} \leq \|x^{\circ}\|_{p,s} ,$$

con lo cual se finaliza la demostración.

$\square$

Corolario 1.1. *Sea $x = (x_n) \in \ell^{p,s}$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq s \leq \infty$. Entonces*

$$\|x\|_{(p,s)} = \|x^*\|_{(p,s)}.$$

Demostración. Empleando el teorema anterior y el Lema 1.2 se obtiene el resultado. $\square$

El siguiente Teorema muestra una versión de la desigualdad triangular con la constante dada en el Lema1.6.

Teorema 1.10. *Sea $1 < p < s \leq \infty$, y suponga que $x^{(k)} = (x_n^{(k)}) \in \ell^{p,s}$, $k = 1, ..., N$. Entonces*

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} x^{(k)} \right\|_{p,s} \leq C_{ps} \sum_{k=1}^{N} \left\| x^{(k)} \right\|_{p,s},$$

donde C_{ps} es la constante dada en Lema 1.6.

Demostración. Sea $x = \sum_{k=1}^{N} x^{(k)}$. Entonces por la definición de norma de descomposición, por el Teorema 1.9 y el Teorema 1.8 se obtiene

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{N} x^{(k)} \right\|_{p,s} &\leq C_{ps} \left\| \sum_{k=1}^{N} x^{(k)} \right\|'_{p,s} = C_{ps} \|x\|_{(p,s)} \\ &= C_{ps} \operatorname{ínf} \left\{ \sum_{k=1}^{N} \left\| x^{(k)} \right\|_{p,s} : x = \sum_{k=1}^{N} x^{(k)} \right\} \leq C_{ps} \sum_{k=1}^{N} \left\| x^{(k)} \right\|_{p,s}. \end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 2

El Operador Multiplicación en $\ell^{p,s}$

En este cápitulo estudiamos el operador multiplicación en los espacios discretos de lorentz. Se muestran las condiciones para que dichos operadores sean compactos e invertibles. Se demuestra que existe gran variedad de operdores multiplicación compactos, una de las razones por las cuales es de interés el estudio de la compacidad del operador multiplicación en $\ell^{p,s}$. Es conocido de la literatura (ver [10]) que el único operador multiplicación compacto en un espacio no átomico de Lorentz es el operador nulo. Para mayor información del operador multiplicación ver [16].

Definición 2.1. *Sea $u = (u_n)_n$ una sucesión de números complejos. Se define una transformación lineal M_u de $\ell^{p,s}$, $1 < p \leq \infty$, $1 \leq s \leq \infty$, en el conjunto de sucesiones complejas por*

$$M_u(x) = u_n x_n, \quad \textit{donde} \quad x = (x_n)_n.$$

Si M_u es acotado con rango en $\ell^{p,s}$, entonces se denomina operador multiplicación en $\ell^{p,s}$.

A continuación presentamos el resultado que establece la condiciones suficientes y necesarias para que M_u sea acotado en $\ell^{p,s}$.

Teorema 2.1. *Sea $u = (u_n)_n$ una sucesión de números complejos. Entonces M_u es acotado en $\ell^{p,s}$, $1 < p \leq \infty$, $1 \leq s \leq \infty$, si y solo si $(u_n)_n$ es acotada.*

Demostración. Supongamos que M_u es un operador acotado, entonces existe $k > 0$ tal que

$$\|M_u x\|_{p,s} \leq K \|x\|_{p,s}, \quad \text{para todo} \quad x = (x_n)_n \in \ell^{p,s}.$$

Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$, $e_n = (e_n(m))_m$, donde

$$e_n(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0, & \text{En otro caso,} \end{cases}$$

y

$$D_{e_n}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < s < 1 \\ 0, & \text{si } s \geq 1, \end{cases}$$

Por lo tanto

$$e_n^*(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1 \\ 0, & \text{En otro caso,} \end{cases}$$

así que $\|e_n\|_{p,s} = 1$. Además como $s \geq 1$ se tiene

$$\|M_u e_n\|_{p,s}^s \leq K^s \|e_n\|_{p,s}^s ,$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} ((ue_n)^*(m))^s \, m^{s/p-1} \leq K^s \sum_{m=1}^{\infty} (e_n(m))^s \, m^{s/p-1} \quad \Rightarrow \\ &(ue_n)^*(1) \leq K e_n^*(1), \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde la última linea se justifica porque

$$(ue_n)^*(m) \leq u_1^* e_n(m-1) = 0, \quad \text{si} \quad m > 1.$$

Además

$$D_{ue_n}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } |u_n| > s \\ 0, & \text{si } 0 \leq |u_n| \leq s, \end{cases}$$

En consecuencia

$$(ue_n)^*(1) = \text{ínf}\{s > 0 : D_{ue_n}(s) \leq 0\} = |u_n| \,. \tag{2.2}$$

De (2.1) y (2.2) se concluye que

$$|u_n| \leq K.$$

Para $s = \infty$, $1 < p \leq \infty$,

$$\begin{aligned} &\sup_{m\geq 1} \left\{ m^{1/p} \left((ue_n)^*(m) \right) \right\} \leq K \sup_{m \geq 1} \left\{ m^{1/p} e_n^* \right\} \quad \Rightarrow \\ &(ue_n)^*(1) \leq K e_n^*(1), \quad \text{esto es,} \quad |u_n| \leq k. \end{aligned}$$

En cualquier caso $u = (u_n)_n$ es acotada.

Supongamos ahora que $u = (u_n)_n$ es acotada, es decir, existe $k > 0$ tal que $|u_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces para cualquier $x = (x_n)_n \in \ell^{p,s}$ se tiene

$$|u_n x_n| \leq K |x_n| .$$

luego, invocando el teorema 1.7 en [5] obtenemos

$$(ux)_n^* \leq K x_n^*, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N},$$

así que

$$\begin{aligned} \|M_u x\|_{p,s} &= \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ((ux)_n^*)^s \, n^{s/p-1} \right)^{1/s}, & \text{si } 1 < p < \infty,\ 1 \leq s < \infty, \\ \displaystyle\sup_{n \geq 1} \left\{ n^{1/p} (ux)_n^* \right\}, & \text{si } 1 < p \leq \infty,\ q = \infty, \end{cases} \\ &\leq K \|x\|_{p,s} , \end{aligned}$$

por tanto, M_u es acotado en $\ell^{p,s}$.

□

El siguiente resultado establece condiciones para que M_u sea invertible en $\ell^{p,s}$. $\mathbb{B}(\ell^{p,s})$ notará el álgebra de los operadores lineales acotados en $\ell^{p,s}$.

Teorema 2.2. *Sea $M_u \in \mathbb{B}(\ell^{p,s})$, $1 < p \leq \infty$, $1 \leq s < \infty$. Entonces M_u es invertible si y solo si existe $\delta > 0$ tal que*

$$|u_n| \geq \delta, \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Dado que M_u es invertible es posible hallar $\delta > 0$ tal que

$$\|M_u x\|_{p,s} \geq \delta \|x\|_{p,s} \quad \text{para todo} \quad x \in \ell^{p,s}.$$

Consideremos la sucesión $e_n = (e_n(m))_m$ definida en el Teorema anterior, entonces por el razonamiento empleado allí se obtiene

$$|u_n| \geq \delta \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado supongamos ahora que $|u_n| \geq \delta$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y algún $\delta > 0$. Sea $v = (v_n)_n$ donde $v_n = 1/u_n$, obsérvese que

$$|v_n| = \left| \frac{1}{u_n} \right| \leq \frac{1}{\delta}, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N},$$

así que en virtud del teorema anterior M_v es acotado, además

$$M_v M_u x = M_u M_v x = x, \quad \text{para todo} \quad x \in \ell^{p,s},$$

por lo tanto $M_v = M_u^{-1}$, es decir que que M_u es invertible.

$\square$

En los dos teoremas siguientes se presentan las condiciones necesarias y suficientes para que M_u tenga rango cerrado y compacto en $\ell^{p,s}$.

Teorema 2.3. *Sea $M_u \in \mathbb{B}(\ell^{p,s})$, $1 < p \leq \infty$, $1 \leq s \leq \infty$. Entonces M_u tiene rango cerrado si y solo si para algún $\delta > 0$*

$$|u_n| \geq \delta, \quad \textit{para todo} \quad n \in S,$$

donde $S = \{n \in \mathbb{N} : u_n \neq 0\}$.

Demostración. Supongamos que $|u_n| \geq \delta$ para todo $n \in S$ para algún $\delta > 0$ y definamos el siguiente conjunto

$$\ell^{p,s}(S) = \{x = (x_n) \in \ell^{p,s} : x_n = 0 \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N} \setminus S\}.$$

Obsérvese que $\ell^{p,s}(S)$ es un subespacio cerrado de $\ell^{p,s}$, en efecto, si $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_n \in \ell^{p,s}(S)$ y $x = (x_n)_n \in \ell^{p,s}$ son sucesiones que satisfacen $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$, en particular para $n \in \mathbb{N} \setminus S$ fijo se tiene

$$\lim_{k\to\infty} x_n^{(k)} = x_n = 0,$$

por lo tanto $x \in \ell^{p,s}(s)$ y $\ell^{p,s}(s)$ es un subespacio cerrado de $\ell^{p,s}$. Ahora se demostrará que $M_u \mid_{\ell^{p,s}(s)}$ tiene rango cerrado. Considéremos sucesiones $x^{(k)} = (x_n^k)$ y $x = (x_n)$ en $\ell^{p,s}(S)$ tales que $M_u x^{(k)} \to X$ cuando $k \to \infty$. Entonces cuando $m, n \to \infty$

$$\left\| M_u x^{(m)} - M_u x^{(n)} \right\|_{p,s} \to 0.$$

Sea $a^{(mn)} = x^{(m)} - x^{(n)}$, y obsérvese que $\left| u_k a_k^{(mn)} \right| \geq \left| \delta a_k^{(mn)} \right|$ lo cual implica

$$\left\{ k \in \mathbb{N} : \left| u_k a_k^{(mn)} \right| > s \right\} \supseteq \left\{ k \in \mathbb{N} : \left| a_k^{(mn)} \right| > s/\delta \right\}, \quad \text{para todo} \quad s > 0,$$

por lo tanto $D_{\delta a^{(mn)}}(s) \leq D_{ua^{(mn)}}(s)$ y de esto se deduce que

$$\inf\{s > 0 : D_{\delta a^{(mn)}}(s) \leq k - 1\} \leq \inf\{s > 0 : D_{ua^{(mn)}}(s) \leq k - 1\},$$

Es decir que $(\delta a^{(mn)})_k^* \leq (ua^{(mn)})_k^*$ para cada $k \in \mathbb{N}$, con lo cual

$$
\begin{aligned}
\left\|ua^{(mn)}\right\|_{p,s} &= \left\|M_u x^{(n)} - M_u x^{(m)}\right\|_{p,s} \\
&= \begin{cases} \left(\sum_{k\in S} \left((ua^{(mn)})_k^*\right)^s k^{s/p-1}\right)^{1/s}, & 1<p<\infty,\, 1\le s<\infty, \\ \sup_{k\in S}\left\{k^{1/p}(ua^{(mn)})_k^*\right\}, & 1<p\le\infty,\, s=\infty \end{cases} \\
&\ge \begin{cases} \left(\sum_{k\in S} \delta^s \left((a^{(mn)})_k^*\right)^s k^{s/p-1}\right)^{1/s}, & 1<p<\infty,\, 1\le s<\infty, \\ \sup_{k\in S}\left\{k^{1/p}\delta(a^{(mn)})_k^*\right\}, & 1<p\le\infty,\, s=\infty \end{cases} \\
&= \delta\left\|a^{(mn)}\right\|_{p,s}.
\end{aligned}
$$

Así que $a^{(mn)} \to 0$ porque $\left\|ua^{(mn)}\right\| \to 0$ cuando $m,n\to\infty$. Esto implica que $(x^{(k)})$ es una sucesión de Cauchy en $\ell^{p,s}(s)$, además $\ell^{p,s}(S)$ es un subespacio cerrado y por lo tanto completo dado que $\ell^{p,s}$ que es completo, entonces podemos encontrar una sucesión $y\in\ell^{p,s}$ tal que $x^{(k)}\to y$ cuando $k\to\infty$. En virtud de la continuidad de M_u, $M_u x^{(k)}\to M_u y$, en consecuencia $x=M_u y$. Por tanto $M_u\mid_{\ell^{p,s}(s)}$ tiene rango cerrado, además $Ker(M_u)=\ell^{p,s}(\mathbb{N}\setminus S)$, es decir M_u tiene rango cerrado.

Por otro lado, para demostrar la condición necesaria razonemos por contradicción, es decir, supongamos que para cada $n\in\mathbb{N}$ existe k_n que satisface

$$|u_{k_n}| < 1/n, \quad \text{para cada} \quad n\in\mathbb{N}.$$

Consideremos la sucesión $e_{k_n}=(e_{k_n}(m))_m$, donde

$$e_{k_n}(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m=k_n, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

como vimos antes $\|e_{k_n}\|_{p,s}=1$ y

$$
\begin{aligned}
\|M_u e_{k_n}\|_{p,s} &= \|ue_{k_n}\|_{p,s} \\
&= \begin{cases} \left(\sum_{m=1}^{\infty} (ue_{k_n})^*(m) m^{s/p-1}\right)^{1/s}, & 1<p<\infty,\, 1\le s<\infty\,, \\ \sum_{m\ge1}\left\{m^{1/p}(ue_{k_n})^*(m)\right\}, & 1<p\le\infty,\, q=\infty \end{cases} \\
&= (ue_{k_n})^*(1) = |u_{k_n}| < \frac{1}{n}\|e_{k_n}\|_{p,s}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto M_u no es acotado para sucesiones diferentes de la sucesión nula, esto es una contradicción.

$\square$

Antes de continuar con el teorema que presenta las condiciones para que M_u sea compacto en $\ell^{p,s}$ enunciaremos un lema (ver [14]) que será empleado en la demostración del mencionado teorema.

Lema 2.1. *Sean X y Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces T es compacto si y solo si la imagen (Tx_n) de cada sucesión acotada (x_n) tiene una subsucesión convergente.*

Teorema 2.4. *Sea $M_u \in \mathbb{B}(\ell^{p,s})$, $1 < p \leq \infty$, $1 \leq s \leq \infty$. Una condición necesaria y suficiente para que que M_u sea compacto es que $|u_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Supongamos que (u_n) no tiende a 0 cunado $n \to \infty$. Entonces $|u_n| \geq \delta$ para infinitos valores de n y algún $\delta > 0$. Sea

$$A = \{n \in \mathbb{N} : |u_n| \geq \delta\} \quad \text{y} \quad B = \{e_k = (e_k(n))_n : k \in A\},$$

Obsérvese además que B es acotado y que para cada $n, k, l \in A$ se tiene

$$\begin{aligned} |(ue_k - ue_l)(n)| &\geq \delta\,|(e_k - e_l)(n)| \Rightarrow \\ (ue_k - ue_l)^* &\geq \delta(e_k - e_l)^*(n) \Rightarrow \\ \|M_u e_k - M_u e_l\|_{p,s} &\geq \delta\,\|e_k - e_l\|_{p,s} \Rightarrow \\ \|M_u e_k - M_u e_l\|_{p,s} &\geq \delta, \quad \text{para} \quad k \neq l, \end{aligned}$$

de donde se concluye, por el lema 2.1 que M_u no es compacto.

Por otro lado, supongamos que $u_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|u_n| < \delta$ para todo $n \geq n_0$, definamos $u^{(n)} = (u_k^{(n)})_k$ como

$$u_k^{(n)} = \begin{cases} u_k & \text{si } k \leq n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observe que $u^{(n)} = (u_k^{(n)})_k$ es una sucesión acotada dado que es finita, en consecuencia $M_{u^{(n)}}$ es acotado, además la dimensión del rango de $M_{u^{(n)}}$ es finito, en efecto si $x = (x_k)_k \in \ell^{p,s}$ entonces

$$M_{u^{(n)}} x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,$$

por tanto podemos asumir que $Ran(M_{u^{(n)}})$ es $\mathbb{C}^m$, para algún $m \in \mathbb{N}$, así que dada $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_k$ una sucesión acotada en $\ell^{p,s}$ el teorema de Bolzano-Weierstrass nos asegura la existencia de una subsucesión $(M_{u^{(n)}}x^{n_p})_{n_p}$ en $Im(M_{u^{(n)}})$ acotada, de donde se concluye que $M_{u^{(n)}}$ es un operador compacto. Además $M_{u^{(n)}}$ converge uniformemente a M_u, en efecto si $x = (x_k)_k \in \ell^{p,s}$

$$
\begin{aligned}
\|M_u x - M_{u^{(n)}} x\|_{p,s}^s &= \sum_{k=n+1}^{\infty} ((ux)_k^*)^s \, k^{s/p-1} \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(u_{k_1}^* x_{k_2}^*\right)^s k^{s/p-1} \\
&\leq u_{n+1}^* \, \|x\|_{p,s} \, ,
\end{aligned}
$$

donde $k_1 + k_2 = k$. Y

$$\|M_u - M_{u^{(n)}}\| = \sup_{\|x\|_{p,s}=1} \|M_u x - M_{u^{(n)}}\|_{p,s} \leq u_{n+1}^*.$$

Obsérvese además que $u_n^* \to 0$ cuando $n \to \infty$ por hipótesis, por lo tanto $\|M_u - M_{u_n}\| \to 0$ cuando $n \to \infty$ de donde se conluye que M_u es compacto (ver teorema VI.12 en [14]).

$\square$

Capítulo 3

El Operador Composición en $\ell^{p,s}$

En el presente capítulo se estudiará el operador composición en $\ell^{p,s}$, $1 < p \leq \infty$, $1 \leq s \leq \infty$, se caracterizará y se establecerán condiciones para que sea acotado, compacto y de rango cerrado. Para un estudio detallado del operador composición en espacios de Banach ver [17]

Definición 3.1. *Para una función $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se define una transformación lineal de $\ell^{p,s}$ en el espacio de todas las sucesiones complejas como*

$$C_T(x) = x \circ T = a(T(n)), \quad \textit{donde} \quad x = (x_n) \in \ell^{p,s}.$$

Si C_T es acotado con rango in $\ell^{p,s}$, entonces se denomina operador composición en $\ell^{p,s}$.

El resultado que sigue ofrece una caracterización del operador composición en $\ell^{p,s}$.

Teorema 3.1. *Una función $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ induce un operador composición acotado*

$$C_T : x \to x \circ T$$

en $\ell^{p,s}$, $1 < p \leq \infty$, $1 \leq s \leq \infty$, si y solo si existe $M > 0$ tal que

$$\mu T^{-1}(\{n\}) \leq M \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Supongamos que C_T es acotado, es decir que para algún $R > 0$

$$\|C_T x\|_{p,s} \leq R \|x\|_{p,s}, \quad \text{para todo} \quad x \in \ell^{p,s}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^{-1}(\{n\})$ no es vacío, entonces

$$\|C_T e_n\|_{p,s} \leq R \|e_n\|_{p,s}.$$

Notése además que

$$
\begin{aligned}
e_n(T(k)) &= \begin{cases} 1 & \text{si } n = T(k), \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } k \in T^{-1}(\{n\}), \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
&= e_{T^{-1}(\{n\})}(k),
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
D_{e_{T^{-1}(\{n\})}}(s) &= \mu\left\{k \in \mathbb{N} : \left|e_{T^{-1}(\{n\})}(k)\right| > s\right\} \\
&= \begin{cases} \mu T^{-1}(\{n\}) & \text{si } 0 < s < 1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}
\end{aligned}
$$

es decir que

$$
\left\|e_{T^{-1}(\{n\})}\right\|_{p,s} \leq R,
$$

y

$$
\begin{aligned}
e^*_{T^{-1}(\{n\})}(k) &= \begin{cases} \text{ínf}\left\{s > 0 : 0 \leq k-1\right\} & \text{cuando } s \geq 1 \\ \text{ínf}\left\{s > 0 : \mu T^{-1}(\{n\}) \leq k-1\right\} & \text{cuando } 0 < s < 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1, ..., \mu T^{-1}(\{n\}) \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Con base en las ecuaciones ateriores y en las siguientes observaciones

$$
\frac{1}{\left(\mu T^{-1}(\{n\})\right)^{1-s/p}} \leq \frac{1}{k^{1-s/p}}, \quad \text{para} \quad k = 1, ..., \mu T^{-1}(\{n\}), \quad 1 \leq s < p < \infty,
$$

y

$$
1 \leq \frac{1}{k^{1-s/p}}, \quad \text{para} \quad k = 1, ..., \mu T^{-1}(\{n\}), \quad 1 < p \leq s < \infty,
$$

Se obtiene

$$
\begin{aligned}
R &\geq \left\| e_{T^{-1}(\{n\})} \right\|_{p,s} \\
&= \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\mu T^{-1}(\{n\})} k^{s/p-1} \right)^{1/s}, & 1 < p < \infty,\, 1 \leq s < \infty, \\ \displaystyle\sup_{k=1,..,\mu T^{-1}(\{n\})} k^{1/p} e^*_{T^{-1}(\{n\})}(k), & 1 < p \leq \infty,\, s = \infty \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left[1 + \frac{1}{2^{1-s/p}} + ... + \frac{1}{(\mu T^{-1}(\{n\}))^{1-s/p}} \right]^{1/s}, & 1 < p < \infty,\, 1 \leq s < \infty, \\ (\mu T^{-1}(\{n\}))^{1/p}, & 1 < p \leq \infty,\, s = \infty \end{cases} \\
&\geq \begin{cases} \left[\mu T^{-1}(\{n\}) \frac{1}{(\mu T^{-1}(\{n\}))^{1-s/p}} \right]^{1/s}, & 1 \leq s < p < \infty \\ (\mu T^{-1}(\{n\}))^{1/s}, & 1 < p \leq s < \infty, \\ (\mu T^{-1}(\{n\}))^{1/p}, & 1 < p \leq \infty,\, s = \infty \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\mu T^{-1}(\{n\}))^{1/p}, & 1 \leq p < s < \infty \text{ o } 1 < p \leq \infty,\, s = \infty, \\ (\mu T^{-1}(\{n\}))^{1/s}, & 1 < p \leq s < \infty, \end{cases}
\end{aligned}
$$

Se conluye entonces que en cualquier caso se puede encontrar $M > 0$ tal que $\mu T^{-1}(\{n\}) \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora supongamos que $\mu T^{-1}(\{n\}) \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y algún $M > 0$. Notése que

$$\mu T^{-1}(\{n\}) = \sum_{i \in T^{-1}(n)} 1,$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\sum_{i \in T^{-1}(\{n\})} 1 &= \sum_{i=1}^{\mu T^{-1}(\{n\})} 1 \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} \chi_{\{1,2,\ldots,\mu T^{-1}(\{n\})\}}(i) \\
&\leq M\mu(n) = M \sum_{i \in \mathbb{N}} e_n(i) \Leftrightarrow \\
\sum_{i \in \mathbb{N}} \chi^*_{T^{-1}(\{n\})} &\leq M \sum_{i \in \mathbb{N}} e^*_n(i) \Leftrightarrow \\
\sum_{i \in \mathbb{N}} (e_n \circ T)^*(i) &\leq M \sum_{i \in \mathbb{N}} e^*_n(i). \Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

Empleando el Teorema de la convergencia monótona se concluye que para cualquier sucesión $x \in \ell^{p,s}$

$$(x \circ T)^*(Mt) \leq x^*(t),$$

y por lo tanto, para cualquier $k \in \mathbb{N} \cup 0$ y $m = 1, 2, ..., M$

$$(x \circ T)^*(kM + m) \leq x^*(k+1).$$

Por otro lado, si $r = s/p - 1$ y asumimos, sin pérdida de generalidad, que $M \in \mathbb{N}$ entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{(kM+m)^r} &\leq \frac{1}{k^r} \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{k}{kM+m} \right)^r \\
&\leq \frac{1}{k^r} \sum_{m=1}^{M} 1 \\
&\leq \frac{1}{k^r} M, \quad k = 0, 1, 2..., \quad 1 \leq s < p < \infty,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{(kM+m)^r} &\leq \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{(kM+M)^r} \\
&\leq \frac{1}{(kM+M)^r} M \\
&= \frac{M^{1-r}}{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, ..., \quad 1 < p \leq s < \infty.
\end{aligned}$$

En virtud a las ecuaciones anteriores, para $1 < p < \infty$, $1 \leq s < \infty$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\|x\circ T\|_{p,s}^{s} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left((x\circ T)^{*}(k)\right)^{s}k^{s/p-1} \\
&= \left[((x\circ T)^{*}(1))^{s}+((x\circ T)^{*}(2))^{s}\frac{1}{2^{r}}+...+((x\circ T)^{*}(M))^{s}\frac{1}{M^{r}}\right] \\
&+ \left[((x\circ T)^{*}(M+1))^{s}\frac{1}{(M+1)^{r}}+...+((x\circ T)^{*}(2M))^{s}\frac{1}{(2M)^{r}}\right]+... \\
&\leq \left[1+\frac{1}{2^{r}}+...+\frac{1}{M^{r}}\right](x^{*}(1))^{s}+\left[1+\frac{1}{(M+1)^{r}}+...+\frac{1}{(2M)^{r}}\right](x^{*}(2))^{s} \\
&+ \left[1+\frac{1}{(2M+1)^{r}}+...+\frac{1}{(3M)^{r}}\right](x^{*}(3))^{s}+... \\
&\leq \begin{cases} M\left[(x^{*}(1))^{s}+\frac{1}{2^{r}}(x^{*}(2))^{s}+\frac{1}{3^{r}}(x^{*}(3))^{s}\right], & 1\leq s<p<\infty, \\ M^{1-r}\left[(x^{*}(1))^{s}+\frac{1}{2^{r}}(x^{*}(2))^{s}+\frac{1}{3^{r}}(x^{*}(3))^{s}\right], & 1<p\leq s<\infty \end{cases} \\
&= \begin{cases} M\,\|x\|_{p,s}^{s}, & 1\leq s<p<\infty, \\ M^{s/p}\,\|x\|_{p,s}^{s}, & 1<p\leq s<\infty \end{cases}
\end{aligned}
$$

Para $s=\infty$, $1<p\leq\infty$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\|x\circ T\|_{p,s} &= \sup_{kM\geq 0}(Mk)^{1/p}(x\circ T)^{*}(Mk) \\
&\leq M^{1/p}\sup_{k\geq 0}k^{1/p}(x^{*}(k)) \\
&= M^{1/p}\,\|x\|_{p,s}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto C_T es acotado en $\ell^{p,s}$, $1<p\leq\infty$, $1\leq s\leq\infty$.

□

EL siguiente resultado establece la equivalencia entre la invertibilidad de T la invertibilidad de C_T y que C_T sea una isometría.

Teorema 3.2. *Sea C_T un operador composición acotado en $\ell^{p,s}$, $1<p\leq\infty$, $1\leq s\leq\infty$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) T es invertible,

(2) C_T es invertible,

(3) C_T es una isometría.

Demostración. (1) $\Leftrightarrow$ (3). Supongamos que T es invertible, entonces $\#\mu T^{-1}(\{n\}) \leq M$ es 0 o 1. Dado que C_T es acotado obenemos

$$\begin{aligned} \|C_T\| &= \sup_{\|x\|_{p,s}=1} \|x \circ U\|_{p,s} \\ &\leq M \sup_{\|x\|_{p,s}=1} \|x\|_{p,s} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$1 = \|e_n \circ T\|_{p,s} \leq \|C_T\|,$$

en consecuencia $\|C_T\| = 1$, y por lo tanto C_T es una isometría.

Si C_T es una isometría, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\|C_T e_n\|_{p,s} = \|e_n\|_{p,s} = 1,$$

lo cual implica que $\mu T^{-1}(\{n\}) = 1$, es decir que T es invertible.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). Supongamos que T es invertible, entonces existe U tal que $(U \circ T)(n) = (T \circ U)(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir que U es inyectivo y por lo tanto C_U es una isométria, y por tanto un operador inyectivo, entonces $C_T \circ C_U = C_U \circ C_T = I$ lo cual significa que T es inyectivo. Por otro lado, si T no es inyectivo existen $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $T(m) = T(n)$, $n \neq m$. Así que para cualquier sucesión $x = (x_k)_k$ en el rango de C_T se tiene que $x_n = x_n$ lo cual implica que C_T no es sobreyectivo una contradicción, y por lo tanto C_T no es inyectivo. Si T no es sobreyectivo el núcleo de C_T es no trivial, una contradicción, por lo tanto C_T es invertible. $\square$

Bibliografía

[1] M.B. Abrahamese, Multiplication operators, Lecture notes in Math., Vol. **693**, Springer Verlag, New York, 1978, 17-36.

[2] S.C Arora, Gopal Datt and Satish Verma, Multiplication operators on lorentz spaces, Indian Journal of Mathematics, Vol **48** (3) (2006), 317-329.

[3] S.C Arora, Gopal Datt and Satish Verma,Operators on Lorentz Sequence Spaces, Mathematica Bohemica, Vol **134** (1) (2009), 87-98.

[4] S. Barza, A.N Marconi, L.E Persson, Best Constants between Equivalent norms in Lorentz Sequence Spaces, Journal of Functions Spaces and Applications, Vol. **2012** (2010).

[5] C. Bennett y R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Pure and applied math, Vol. **129**, Academic Press Inc., New York, 1988.

[6] R.E. Castillo, H.C. Chaparro, J.C. Ramos Fernández. Orlicz-Lorentz spaces and their Multiplication Operators, en proceso de arbitraje.

[7] N.J Kalton, Linear Operators on L_p para $0 < p < 1$. Transaccion of the American Mathematical Society, Vol. **259**, no 2, 1980, 319-355.

[8] A. Kaminska and A.M Parrish, Convexity and concavity constants in Lorentz and Marcinkiewicz spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. **343**, no 1, pp 337-351, 2008.

[9] I. Halperin, Function Spaces, Canadian Journal of Mathematics,Vol. 5, pp.273-288, 1953.

[10] H. Hudzik, R. Rajeev Kumar, Romesh Kumar. Matrix Multiplication Operator on Banach Function Spaces. Proc. Indian Acad. SCi. Vol. **116**, 2006, 71-81

[11] R. Hunt, On $L(p, q)$ Spaces, L´Enseignmen Math **12(2)** (1966), 249-276.

[12] G.G. Lorentz, Some new Functional Spaces, Annals Of Mathematics II, vol. **51**, (1950), 37-55.

[13] G.G. Lorentz, Bernstein Polynomials, Mathematical Expositions, no 8, University of Toronto Press,1953.

[14] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis* , Vol. **1**,Academic Press Inc., London, 1970

[15] G. Sinnamon, The level function in rearrangment invariant spaces, Publicacions Mathemàtiques, Vol. 45, 175-198, 2001.

[16] R. K. Singh and A. Kumar, Multiplication and composition operators with closed ranges, Bull. Aust. Math. Soc. Vol. **16** (1977), 247-252.

[17] R. K. Singh and J.S Manhas, Composition operators on function spaces, Vol. **179**, Mathematics Studies, North Holland, 1993.